

1. Body a priamky v rovine

Priestorom, v ktorom pracujeme, je reálna euklidovská rovina $\mathbb{E}^2$.

1.1. Určenosť bodu na priamke: deliaci pomer (angl: signed ratio). Nech A, B, C sú tri navzájom rôzne kolíneárne body. **Deliaci pomer** usporiadanej trojice bodov A, B, C (alebo bodu C vzhľadom na body A, B), ozn. (ABC) , je také reálne číslo, že

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|},$$

pričom

- $(ABC) < 0$, ak C je vnútorným bodom úsečky AB ,
- $(ABC) > 0$, ak C leží zvonka AB .

Pomocou deliaceho pomeru určujeme polohu bodu C na $\overleftrightarrow{AB}$ vzhľadom na body A a B .

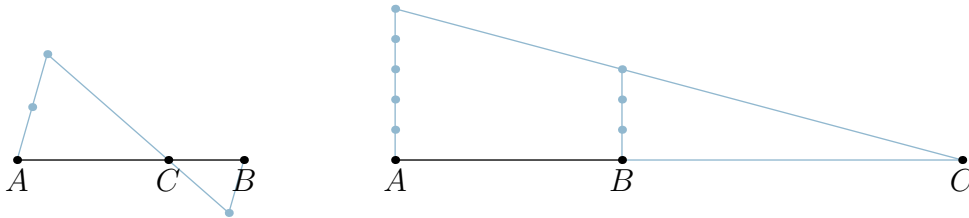
Niekedy sa používa aj symbolický zápis

$$(ABC) = \frac{AC}{BC},$$

v ktorom čitateľ aj menovateľ sú chápané ako **orientované dĺžky** orientovaných úsečiek. To znamená, že najprv si zvolíme **orientáciu priamky**, na ktorej ležia body A, B, C (napr. „sprava doľava“). Orientovaná úsečka má potom kladnú dĺžku, ak jej orientácia sa zhoduje s orientáciou priamky, v opačnom prípade má zápornú dĺžku. Pre deliaci pomer to znamená, že

- $(ABC) > 0$, ak AC a BC sú rovnako orientované (obe „ukazujú na tú istú stranu“),
- $(ABC) < 0$, ak AC a BC sú opačne orientované.

Štandardne sa budete stretávať s deliacim pomerom, ktorý je racionálne číslo. Je to výhodné



vľavo: $(ABC) = -2$, vpravo: $(ABC) = 5/3$.

pri kreslení obrázkov (či už črtaní alebo rysovaní): na rovnobežné priamky, ktorým je $\overleftrightarrow{AB}$ transversálou, nanášame k bodu A dieliky, ktorých počet je daný čitateľom (ABC) , a k bodu B počet daný menovateľom. Ak $(ABC) > 0$, nanášame do tej istej strany, inak do opačných strán od $\overleftrightarrow{AB}$.

Z definície deliaceho pomeru je zjavné, že okrem bodu B má každý bod C na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ jednoznačne určený deliaci pomer (ABC) . Na druhej strane, pre takmer každé reálne číslo λ (viď nasledujúce zamyslenie) existuje na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ presne jeden bod C taký, že $(ABC) = \lambda$. Deliaci pomer teda môžeme chápať ako súradnicu bodu na priamke vzhľadom na jej pevne zvolené navzájom rôzne body A a B .

NA ZAMYSLENIE. Nie každému reálnemu číslu zodpovedá nejaký bod $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $C \neq A, B$. Ktoré reálne hodnoty (ABC) nenadobudne?

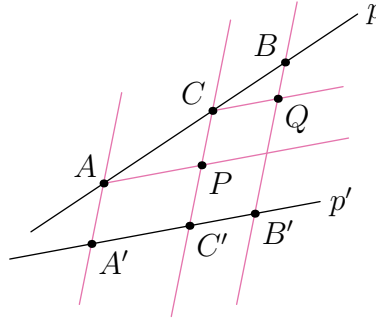
Vedeli by ste dodefinovať deliaci pomer ešte pre nejaký bod na $\overleftrightarrow{AB}$?

ÚLOHA 1. Pomocou deliaceho pomeru (ABC) vyjadrite deliace pomery (BAC) , (BCA) , (CBA) , (CAB) a (ACB) !

Tvrdenie 1.1. Majme dve trojice navzájom rôznych kolineárnych bodov A, B, C a A', B', C' , pričom $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{A'B'}$.

- (i) (**Tálesova veta**) Ak $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria jednej osnove, potom $(ABC) = (A'B'C')$.
- (ii) Ak $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria jednému zväzku a $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, potom $(ABC) = (A'B'C')$.

Dôkaz. (i) Vedme bodmi A a C rovnobežky k $\overleftrightarrow{A'B'}$ a zostrojme body P, Q ako na obrázku.

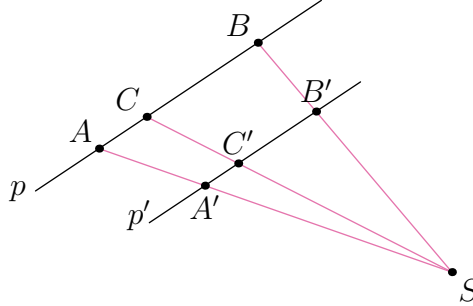


Trojuholníky $\triangle APC$ a $\triangle CQB$ sú podobné, teda

$$|AP| : |CQ| = |AC| : |CB|.$$

Navyše z rovnobežnosti máme, že $|AP| = |A'C'|$ a $|CQ| = |C'B'|$.

(ii)



Nech S je stred uvažovaného zväzku. Platí

$$|AC| : |A'C'| = |CS| : |C'S| = |CB| : |C'B'|,$$

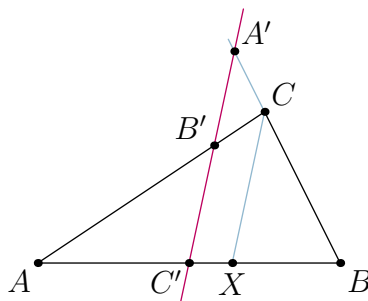
kde prvá rovnosť vyplýva z podobnosti $\triangle ACS$ a $\triangle A'C'S$, druhá z podobnosti $\triangle CBS$ a $\triangle C'B'S$. $\square$

Veta 1.2 (Menelaova veta). Majme $\triangle ABC$ a body $A' \in \overleftrightarrow{BC}$, $B' \in \overleftrightarrow{AC}$, $C' \in \overleftrightarrow{AB}$ rôzne od vrcholov A, B, C . Potom body A', B', C' sú kolineárne práve vtedy, keď

$$(1) \quad (ABC')(BCA')(CAB') = 1.$$

Dôkaz. Ak sú body A', B', C' kolineárne, tak priamka nimi určená pretne buď dve strany $\triangle ABC$ alebo žiadnu. Počet záporných činiteľov na ľavej strane rovnosti (1) je tak párny, preto v súčine máme kladné číslo. Stačí nám tak zamerať sa už len na dĺžky jednotlivých úsečiek.

Predpokladajme, že $\overleftrightarrow{A'B'}$ trojuholník pretne a bez ujmy na všeobecnosti nech pretína strany AB a AC .



Nech X je taký bod na AB , že $\overleftrightarrow{CX} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$. Z konštrukcie bodu X a z Tálesovej vety 1.1, (i) aplikovanej najprv na trojice A, B', C a A, C', X a potom na trojice A', C, B a C', X, B máme

$$\frac{|AC'|}{|AB'|} = \frac{|XC'|}{|CB'|} \quad \text{a} \quad \frac{|XC'|}{|CA'|} = \frac{|BC'|}{|BA'|}.$$

Tieto rovnosti teraz využijeme pri výpočte:

$$(ABC')(BCA')(CAB') = \frac{|AC'|}{|BC'|} \frac{|BA'|}{|CA'|} \frac{|CB'|}{|AB'|} = \frac{|XC'|}{|CB'|} \frac{|BA'|}{|BC'|} \frac{|CB'|}{|CA'|} = \frac{|XC'|}{|BC'|} \frac{|BA'|}{|CA'|} = 1.$$

Prípad, keď $\overleftrightarrow{A'B'}$ trojuholník nepretína, sa dokazuje podobne.

Keďže deliaci pomer (ABC') je jednoznačne určený polohou bodu C na $\overleftrightarrow{AB}$ a naopak, dokázali sme nielen implikáciu, ale celú ekvivalenciu: ak by sa stalo, že

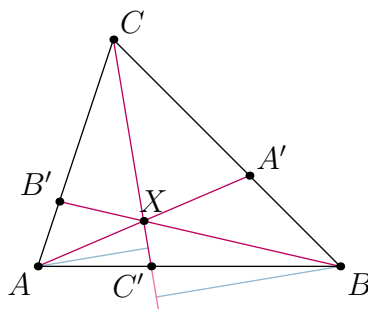
$$(ABC')(BCA')(CAB') = 1,$$

ale $A' \notin \overleftrightarrow{B'C'}$, potom z práve dokázaného by pre bod $A'' = \overleftrightarrow{B'C'} \cap \overleftrightarrow{BC} \neq A'$ platilo, že $(BCA') = (BCA'')$, čo je spor. $\square$

Veta 1.3 (Cevova veta). Majme $\triangle ABC$ a body $A' \in \overleftrightarrow{BC}$, $B' \in \overleftrightarrow{AC}$, $C' \in AB$ rôzne od vrcholov A, B, C . Potom $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria tomu istému zväzku práve vtedy, keď

$$(ABC')(BCA')(CAB') = -1.$$

Dôkaz. Predpokladajme, že $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria jednému zväzku. Nech stred tohto zväzku, bod X , leží vnútri $\triangle ABC$. Potom zrejme $(ABC')(BCA')(CAB')$ je záporné číslo a potrebujeme tak sledovať už len dĺžky jednotlivých úsečiek.



Trojuholníky $\triangle AXC$ a $\triangle CXB$ majú spoločnú stranu XC , pomer ich obsahov je tak rovný pomeru ich výšok na túto stranu, a ten je s podobnosti trojuholníkov (viď obrázok) rovnaký ako

pomer dĺžok úsečiek AC' a BC' . Podobne to platí pre ďalšie dvojice trojuholníkov. Môžeme tak priamo počítať (obsah $\triangle PQR$ označujeme ako $\mathcal{S}_{PQR}$):

$$|(ABC')(BCA')(CAB')| = \frac{|AC'|}{|BC'|} \frac{|BA'|}{|CA'|} \frac{|CB'|}{|AB'|} = \frac{\mathcal{S}_{AXC}}{\mathcal{S}_{CXB}} \frac{\mathcal{S}_{BXA}}{\mathcal{S}_{AXC}} \frac{\mathcal{S}_{CXB}}{\mathcal{S}_{BXA}} = 1.$$

Podobne (pomocou obsahov trojuholníkov) sa dokážu aj prípady, keď sa stred zväzku nachádza mimo $\triangle ABC$.

A ako pri dôkaze Menealovej vety sme vlastne dokázali ekvivalenciu. $\square$

1.2. Dvojpomer (cross-ratio). Nech A, B, C, D sú štyri navzájom rôzne kolineárne body. **Dvojpomer** usporiadanej štvorice bodov A, B, C, D je reálne číslo

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Podobne ako deliaci pomer, aj dvojpomer sa zvykne zapisovať pomocou orientovaných dĺžok orientovaných úsečiek:

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Tvrdenie 1.4. Majme dve štvorice navzájom rôznych kolineárnych bodov A, B, C, D a A', B', C', D' , pričom $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{A'B'}$. Ak priamky $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ a $\overleftrightarrow{DD'}$ patria jednému zväzku, potom $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

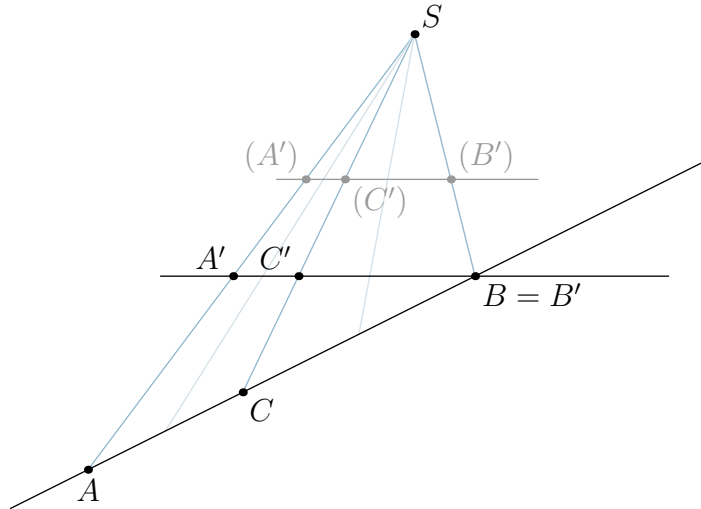
Dôkaz. Ak $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, potom podľa Tvrdenia 1.1(ii) platí

$$(ABC) = (A'B'C') \quad \text{a} \quad (ABD) = (A'B'D')$$

a keďže dvojpomer je podielom deliacich pomerov, tak aj $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Nech $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ a $\overleftrightarrow{DD'}$ patria jednému zväzku, označme jeho stred S .

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{A'B'}$ sa pretínajú v bode $B = B'$: ak by to tak nebolo, premietneme body A', B', C' a D' zo stredu S na vhodnú rovnobežnú priamku (viď obrázok), čím sa podľa Tvrdenia 1.1(ii) deliace pomery nezmenia.



Deliaci pomer $(A'S)$ označme ako λ . Všimnime si teraz $\triangle A'AB$ a priamku CS . Keďže C, C', S sú kolineárne, podľa Menelaovej vety máme

$$(ABC)(B'A'C')(A'S) = 1$$

$$(ABC) = \frac{1}{\lambda(B'A'C')} = \frac{(A'B'C')}{\lambda}$$

Ten istý vzťah dostaneme, keď bod C nahradíme bodom D :

$$(ABD) = \frac{(A'B'D')}{\lambda},$$

a tak pre dvojpomery skúmaných štvoríc bodov dostávame

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\lambda(A'B'C')}{\lambda(A'B'D')} = (A'B'C'D').$$

□

1.3. Určenosť bodu na priamke: afinné súradnice. Polohu bodu B na priamke p môžeme určiť aj nasledovne: ak priamku p budeme chápať ako číselnú os, potom afinná súradnica bodu B je jeho číselná hodnota na tejto osi.

Exaktnejšie: afinná súradnicová sústava na priamke je určená

- bodom O (**začiatok súradnicovej sústavy**)
- a bodom E (**jednotkový bod** rôznym od O).

Afinná súradnica bodu $B \in \overleftrightarrow{OE}$ rôzneho od O aj E je

$$b = (BEO).$$

V prípade, keď $B = O$, je afinnou súradnicou bodu B číslo 0, a ak $B = E$, je afinnou súradnicou tohto bodu 1.

Zvolená súradnicová sústava zjavne určuje jedno-jednoznačnú korešpondenciu medzi bodmi priamky a reálnymi číslami.

Týmto spôsobom môžeme zaviesť afinné súradnice aj v rovine či vo viacrozmernom priestore.

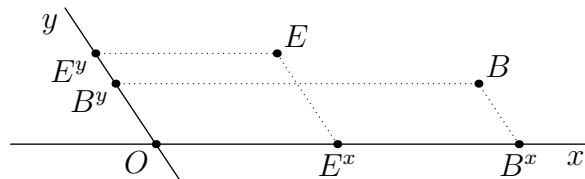
V $\mathbb{E}^2$ nech

- x, y sú rôznobežné priamky (**súradnicové osi**) pretínajúce sa v bode O (**začiatok súradnicovej sústavy**),
- E je bod neležiaci na žiadnej z priamok x, y (**jednotkový bod**).

Nech E^x a E^y sú rovnobežné priemety bodu E na súradnicové osi. V prvom prípade je smer premietania rovnobežný s osou y , v druhom s osou x . Body E^x a E^y sú jednotkovými bodmi na súradnicových osiach. **Afinnými súradnicami bodu** O je usporiadaná dvojica

$$((B^x E^x O), (B^y E^y O)),$$

kde B^x a B^y sú priemety bodu B na príslušnú súradnicovú os. Ako bolo popísané vyššie, súradnice bodu B môžu v špeciálnych prípadoch nadobúdať aj hodnoty 0 alebo 1.

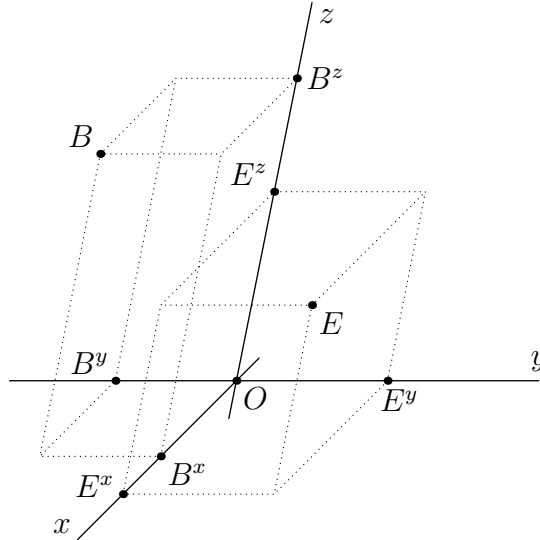


Uvedenú konštrukciu je možné zovšeobecniť pre viac rozmerov. Napríklad pre súradnice v $\mathbb{E}^3$ nech

- O je bod (**začiatok súradnicovej sústavy**),
- x, y, z sú priamky, ktoré sa pretínajú v bode O a neležia všetky v jednej rovine (**súradnicové osi**),
- E je bod neležiaci na žiadnej z priamok x, y, z (**jednotkový bod**).

Nech E^x, E^y, E^z (jednotkové body na súradnicových osiach) sú rovnobežné priemety bodu E na súradnicové osi. V tomto prípade je smer premietania na os x určený nie priamkou, ale rovinou $\overleftrightarrow{yz}$, analogicky pre zvyšné dve osi. Podobne nech B^x, B^y a B^z sú priemety bodu B na príslušnú súradnicovú os. **Afinnými súradnicami bodu O** je usporiadaná trojica

$$((B^x E^x O), (B^y E^y O), (B^z E^z O)).$$



Ekvivalentne, namiesto jednotkového bodu E a jeho následného premietania na osi je možné voliť si priamo jednotkové body jednotlivých súradnicových osí. Jediná podmienka, ktorú musia tieto body spĺňať je, že sú rôzne od začiatku O .

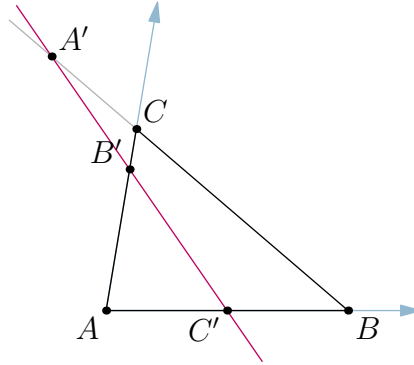
odkaz do analytickej geometrie

Príklad 1.5. Dokážeme si Menelaovu vetu (Veta 1.2) pomocou afinných súradníc.

Majme konfiguráciu bodov ako v tvrdení Vety. Označme

$$(ABC') = \gamma, \quad (BCA') = \alpha, \quad (CAB') = \beta.$$

Prepíšeme si situáciu z Menelaovej vety do afinných súradníc.



Zvoľme si súradnice v rovine tak, že A je začiatok súradnicovej sústavy, B je jednotkový bod na prvej súradnicovej osi a C je jednotkový bod na druhej súradnicovej osi, čiže

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, 1).$$

Zrejme $\overleftrightarrow{AB}$ je množinou bodov, ktorých druhá súradnica je nulová, $\overleftrightarrow{AC}$ pozostáva z bodov s nulovou prvou súradnicou.

Z deliacich pomerov $(ABC') = \gamma$ a $(CAB') = \beta$ vieme vypočítať afinné súradnice

$$C' = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}, 0 \right), \quad B' = \left(0, \frac{1}{1 - \beta} \right).$$

Podľa Tvrdenia 1.1 (i) (Tálesova veta) sa deliace pomery kolineárnych bodov zachovávajú pri rovnobežnom premietaní na súradnicové osi. Rovnaké deliace pomery majú tak aj ich súradnice. Z $(BCA') = \alpha$ tak máme

$$\frac{b_i - a'_i}{c_i - a'_i} = \alpha, \quad i = 1, 2,$$

kde $A' = (a'_1, a'_2)$, $B = (b_1, b_2) = (1, 0)$, $C = (c_1, c_2) = (0, 1)$. Vieme tak vypočítať súradnice bodu A :

$$A = \left(\frac{-1}{\alpha - 1}, \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right).$$

Predpokladajme teraz, že sú body A', B', C' kolineárne. Ich deliaci pomer síce nepoznáme, ale vieme, že sa zachováva pri premietaní na osi, teda pre súradnice platí:

$$\begin{aligned} \frac{c'_1 - b'_1}{a'_1 - b'_1} &= \frac{c'_2 - b'_2}{a'_2 - b'_2} \\ \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{\frac{-1}{\alpha-1}} &= \frac{\frac{-1}{1-\beta}}{\frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{1-\beta}} \end{aligned}$$

odkiaľ mechanickým počítaním dostaneme, že

$$\alpha\beta\gamma = 1.$$

Opačná implikácia znovu vyplýva z jednoznačnosti medzi deliacim pomerom a bodom na priamke.

2. Izometrie

2.1. Niektoré triedy izometrií. Budeme sa teraz chvíľu zaoberať dôležitými triedami zobrazení euklidovskej roviny. Zobrazenie, aké budeme študovať, každému bodu roviny $\mathbb{E}^2$ priradí nejaký iný bod tejto roviny. Množina obrazov je teda tá istá ako množina vzorov a v takom prípade hovoríme o **transformáciách euklidovskej roviny**.

Pevný (samodružný, invariantný) bod transformácie f je taký bod A , pre ktorý platí $f(A) = A$. **Pevnou (samodružnou, invariantnou)** priamkou transformácie f je priamka p , pre ktorú platí $f(p) \subset p$. Pokiaľ je p taká samodružná priamka, že každý jej bod je samodružný, potom ju nazývame aj **silne samodružnou**. Ak samodružná priamka nie je silne samodružná, potom sa nazýva aj **slabo samodružnou**.

Bod S je **stredom úsečky AB** ak

- $S \in AB$,
- $|SA| = |SB|$.

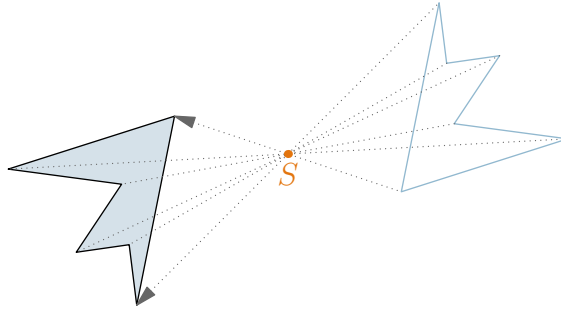
Ak máme v rovine zavedenú afinnú súradnicovú sústavu, v ktorej dané body A, B majú súradnice $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, potom stred S úsečky AB má súradnice

$$(2) \quad S = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

Zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je **izometria (zhodnosť, zhodné zobrazenie)**, ak zachováva vzdialenosti bodov, t.j. ak

$$\forall P, Q \in \mathbb{E}^2 \quad |f(P)f(Q)| = |PQ|.$$

Nech $S \in \mathbb{E}^2$ je pevne zvolený bod. **Stredová súmernosť** so stredom S je transformácia $\mathbb{E}^2$, ktorá každý bod A zobrazí do takého bodu A' , že S je stred úsečky AA' .



Ak by sme chceli stredovú súmernosť vyjadriť analyticky, môžeme si pomôcť predpisom pre stred úsečky (2): ak pevne zvolený stred súmernosti je $S = (s_1, s_2)$, potom obrazom bodu $A = (a_1, a_2)$ v súmernosti podľa S je bod

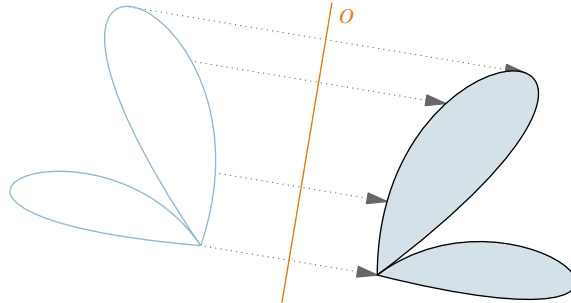
$$A' = (2s_1 - a_1, 2s_2 - a_2).$$

Stredová súmernosť má dôležitú vlastnosť: ak roviny zobrazíme súmerne podľa toho istého stredu dvakrát, každý bod roviny sa dostane na svoje pôvodné miesto. Vo výsledku teda dostávame tzv. **identické zobrazenie** roviny, t.j. zobrazenie ponechávajúce všetky body na ich pôvodných miestach. Zobrazenia s touto vlastnosťou nazývame involúciami. Formálnejšie: zobrazenie f je **involúcia**, ak $f \circ f$ je identita (identické zobrazenie). [odkaz: príklady na precvičenie](#)

Nech $o \subset \mathbb{E}^2$ je pevne zvolená priamka. **Osová súmernosť** podľa osi o je transformácia $\mathbb{E}^2$, ktorá každý bod A zobrazí do takého bodu A' , že o je os úsečky AA' . Podrobnejšie: obraz A' bodu $A \in \mathbb{E}^2$ v súmernosti podľa osi o zostrojíme nasledovne:

- ak $A \in o$, potom $A' = A$,
- ak $A \notin o$, nech
 - (1) $o_A^\perp$ je priamka prechádzajúca cez A a kolmá na o
 - (2) a $A^\perp = o \cap o_A^\perp$,
 potom A' je taký bod na $o_A^\perp$, ktorý leží v opačnej polrovine od o ako A a $|A'A^\perp| = |AA^\perp|$.

doplniť bod A do obrázka



Osová súmernosť je zjavne tiež involúciou.

Analyticky popísať osovú súmernosť vo všeobecnosti je trochu náročnejšie,

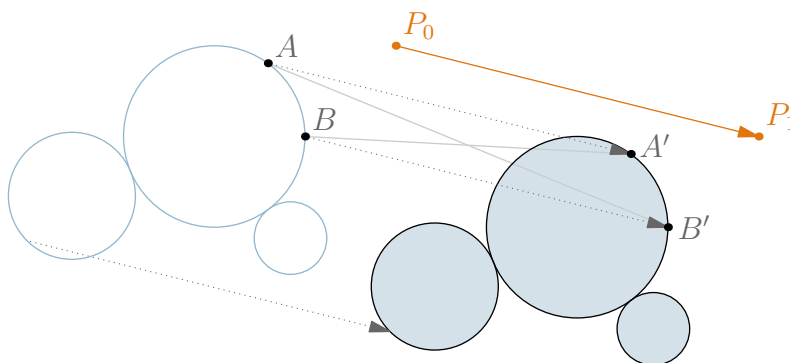
[odkaz niekam do analytickej geometrie](#)

[odkaz: príklady na precvičenie](#)

Posunutie (translácia) je transformácia $\mathbb{E}^2$ určená orientovanou úsečkou P_0P_1 (t.j. úsečkou s určeným poradím koncových bodov). Obrazom bodu A je potom taký bod A' , že orientovaná úsečka AA' určuje ten istý vektor ako orientovaná úsečka P_0P_1 .

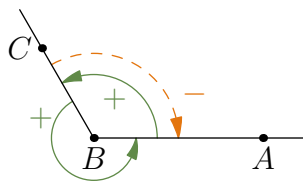
Vyjadriť posunutie analyticky je pomerne priamočiare. Obrazom bodu $A = (a_1, a_2)$ v posunutí o vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je bod $A' = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$. Ak máme vektor $\mathbf{u}$ reprezentovaný orientovanou úsečkou P_0P_1 , kde $P_0 = (p_{01}, p_{02})$, $P_1 = (p_{11}, p_{12})$, potom $\mathbf{u} = (p_{11} - p_{01}, p_{12} - p_{02})$ a $A + \mathbf{u} = (a_1 + (p_{11} - p_{01}), a_2 + (p_{12} - p_{02}))$. [odkaz: viac o posunutíach a vektorech v analytickej geometrii](#)

Ak sa chceme v popise posunutia vyhnúť pojmu vektora, môžeme posunutie zdefinovať ako transformáciu $\mathbb{E}^2$, kde pre každú dvojicu bodov A, B a ich obrazy A', B' platí, že stred úsečky AB' a stred úsečky $A'B$ sú totožné. Teda pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{E}^2$ sú body A, A', B, B' buď kolíneárne (a správne zoradené so správnymi vzdialenosťami) alebo tvoria rovnobežník $AA'B'B$.

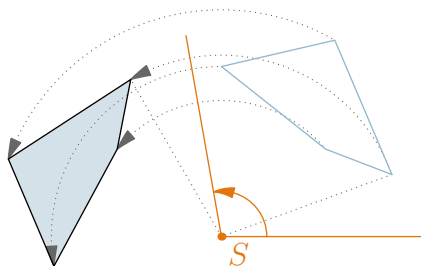


[odkaz: príklady na precvičenie](#)

Nech $S \in \mathbb{E}^2$ je pevne zvolený bod a nech φ je orientovaná veľkosť uhla (viď obrázok). **Otočenie (rotácia)** okolo stredu S o uhol φ je transformácia $\mathbb{E}^2$, ktorá každý bod A zobrazí do takého bodu A' , že $|SA'| = |SA|$ a $\angle ASA' = \varphi$.



OBR. 2. Veľkosť $\angle ABC$ je 120° , veľkosť $\angle CBA$ je 240° alebo tiež -120° .



odkaz: analytické vyjadrenie rotácie.

odkaz: príklady na precvičenie

Tvrdenie 2.1. Stredová súmernosť, osová súmernosť, posunutie aj otočenie sú izometriami euklidovskej roviny.

Dôkaz. Cvičí sa s vetami o zhodnosti trojuholníkov, doplniť, stačí osovú súmernosť, ostatné je analogické

□

NA ZAMYSLENIE. Aké samodružné body a samodružné priamky majú doteraz spomenuté izometrie?

Na stredovú súmernosť môžeme nahliadať ako na špeciálny prípad otočenia, keď uhol φ , o ktorý otáčame okolo stredy, má veľkosť 180° . No oproti iným otočeniam majú stredové súmernosti niektoré dôležité vlastnosti, preto na ne často nahliadame tak, že tvoria špeciálnu triedu izometrií.

Podobne aj identita roviny by sa dala zaradiť medzi posunutia, keď vektor posunutia je nulový, a tiež medzi rotácie okolo ľubovoľného stredy o nulový uhol. No pri klasifikáciách je identita špeciálne zobrazenie majúce akoby svoju vlastnú triedu.

2.2. Štruktúra množiny izometrií. Izometria je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov: nech A, B, C sú nekolineárne, teda tvoria vrcholy trojuholníka, a nech o zhodnosti f vieme, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$. Každý ďalší bod $P \in \mathbb{E}^2$ je jednoznačne určený svojimi vzdialenosťami od A, B a C . Potom P sa izometriou f nutne zobrazí do jednoznačne určeného bodu P' , pre ktorý

$$|P'A'| = |PA|, \quad |P'B'| = |PB| \quad \text{a} \quad |P'C'| = |PC|.$$

Lahko sa presvedčíme, že

- zložením izometrií je zase izometria; naozaj, ak f a g sú izometrie, potom pre ich zloženie

$$|g \circ f(A)g \circ f(B)| = |g(f(A))g(f(B))| = |f(A)f(B)| = |AB|,$$

- neutrálnym prvkom operácie skladania zobrazení je identické zobrazenie, ktoré je tiež zjavne a triviálne izometriou,
- ku každej izometrii f vieme nájsť **inverzné zobrazenie**, t.j. také zobrazenie f^{-1} , že $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ je identita. Toto inverzné zobrazenie je tiež izometriou: označme $f(A) = A'$, teda $f^{-1}(A') = A$, podobne pre B , potom

$$|f^{-1}(A')f^{-1}(B')| = |(f^{-1}(f(A))f^{-1}(f(B)))| = |AB| = |f(A)f(B)| = |A'B'|.$$

Tieto pozorovania môžeme zhrnúť do konštatovania:

Izometrie euklidovskej roviny tvoria grupu.

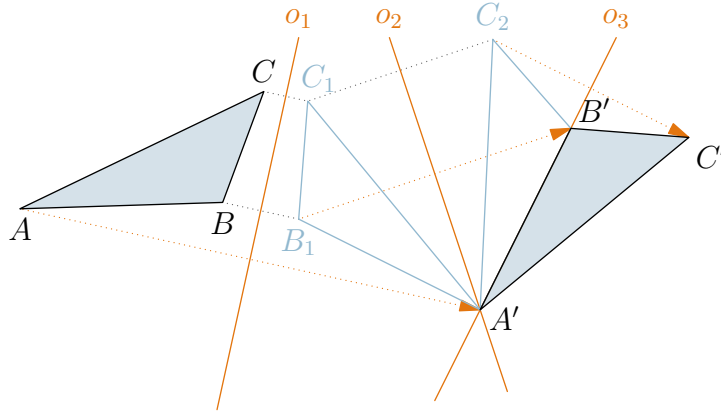
NA ZAMYSLENIE. Čo sú inverzné zobrazenia k jednotlivým spomenutým izometriám (stredová súmernosť, posunutie, ...)?

Veta 2.2. Pre ľubovoľné trojuholníky v euklidovskej rovine platí: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ práve vtedy, keď existuje izometria f roviny taká, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$.

Dôkaz. Ak f je zhodnosť a $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$, potom $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú zhodné podľa vety sss o zhodnosti trojuholníkov.

Nech teraz naopak sú tieto trojuholníky zhodné. Nájdeme nanajvýš tri osové súmernosti f_1, f_2, f_3 také, že pre ich zloženie bude platiť

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(A) = A', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(B) = B', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(C) = C'.$$



Ak $A' = A$, tak f_1 nech je identita. Ak $A' \neq A$, potom nech o_1 je os úsečky AA' . Nech f_1 je osová súmernosť podľa osi o_1 . Zrejme f_1 bod A zobrazí na bod $f(A)$. Označme $B_1 = f_1(B)$ a $C_1 = f_1(C)$. Keďže osová súmernosť je zhodnosť, tak platí

$$|A'B'| = |AB| = |A'B_1|.$$

Ak $B' = B_1$, potom zas nech f_2 je identita. Ak $B' \neq B_1$, potom nech o_2 je os úsečky B_1B' a nech f_2 je osová súmernosť podľa osi o_2 , teda $f_2(B_1) = B'$. Keďže $|A'B'| = |A'B_1|$, tak $A' \in o_2$. Preto $f_2(A') = A'$. Pre bod C označme $f_2(C_1) = C_2$. Pre vzdialenosti bodov máme

$$\begin{aligned} |A'C'| &= |AC| = |A'C_1| = |A'C_2| \\ |B'C'| &= |BC| = |B_1C_1| = |B'C_2|, \end{aligned}$$

kde v oboch riadkoch prvá rovnosť vyplýva z predpokladu, druhá z toho, že f_1 je zhodnosť a tretia z toho, že f_2 je zhodnosť.

Nakoniec, ak $C' \neq C_2$, potom nech o_3 je os úsečky C_2C' . Z práve ukázaných rovností máme, že $A', B' \in o_3$, teda sú to pevné body súmernosti f_3 podľa osi o_3 . Navyše $f_3(C_2) = C'$. (Znovu v prípade, že $C' = C_2$, zvolíme za f_3 identitu.)

Našli sme tak súmernosti f_i také, že

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(A) = A', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(B) = B', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(C) = C',$$

čím sme tvrdenie dokázali. $\square$

Dôkaz predchádzajúcej vety je veľmi silný, dokázal viac, než tvrdila samotná veta. Videli sme v ňom, že

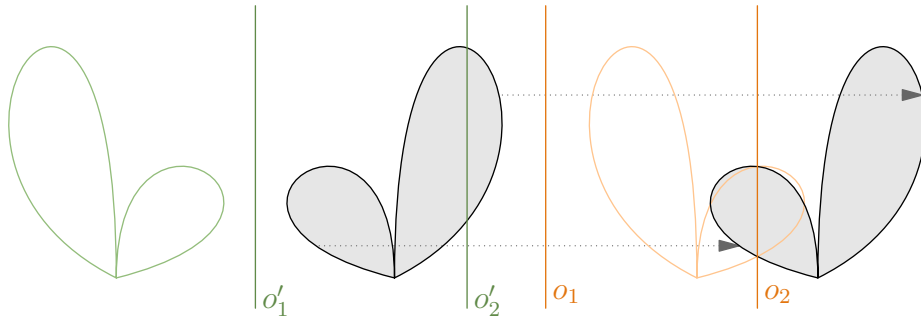
každú zhodnosť vieme napísať ako zloženie nanajvýš troch osových súmerností.

Táto vedomosť nám dáva do rúk nástroj na klasifikáciu všetkých izometrií roviny.

2.3. Klasifikácia izometrií. Zistíme teda aké izometrie euklidovskej roviny existujú. Postupne budeme preverovať, čo dostaneme zložením 0,1,2 a 3 osových súmerností. Osi súmerností budeme označovať o_i , príslušné súmernosti f_i .

- (i) **Žiadna súmernosť.** V tejto triede je jediná izometria – identita.
- (ii) **Jedna súmernosť.** Tiež pomerne triviálna situácia: trieda pozostáva zo samotných osových súmerností.
- (iii) **Dve súmernosti.** Pri skladaní dvoch osových súmerností vyšetrujeme jednotlivé prípady podľa vzájomnej polohy týchto osí:

- $o_1 = o_2$, vtedy $f_1 = f_2$ a $f_2 \circ f_1$ je identita.
- o_1 a o_2 sú rovnobežné rôzne. Lahko nahliadneme, že $f_2 \circ f_1$ je posunutie v smere kolmom na osi o dvojnásobok ich vzdialenosti. Dôležitým pozorovaním je, že to isté posunutie dostaneme aj zložením iných súmerností, ktorých osi budú ľubovoľným (spoločným) posunutím osí o_1 a o_2 .



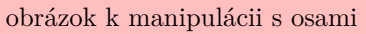
- o_1 a o_2 sú rôznobežné. Znovu lahko vyargumentujeme, že v tomto prípade je $f_2 \circ f_1$ otočenie so stredom v priesečníku osí a uhol otočenia je dvojnásobkom jedného z uhlov určených osami. Podobne ako pri predchádzajúcom prípade, aj tu môžeme obe osi spoločne ľubovoľne otočiť okolo ich priesečníka a výsledným zložením nových osových súmerností bude to isté otočenie.
- (iv) **Tri súmernosti.** Pri skladaní troch súmerností máme dva na seba podobné špeciálne prípady:

- o_1, o_2 a o_3 patria jednej osnove (t.j. sú všetky navzájom rovnobežné). Vtedy $f_2 \circ f_1$ je posunutie. To isté posunutie dostaneme aj ak obe osi posunieme tak, aby druhá os

splynula s tretou, a tak druhá súmernosť bude mať tú istú os ako tretia: $f'_2 = f_3$. Vtedy

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = f_3 \circ (f'_2 \circ f'_1) = (f_3 \circ f'_2) \circ f'_1 = f'_1,$$

výsledným zložením je teda osová súmernosť.

- o_1, o_2 a o_3 patria tomu istému zväzku, t.j. prechádzajú všetky tým istým spoločným bodom. Tentokrát je $f_2 \circ f_1$ otočenie a toto znovu zapíšeme ako zloženie iných dvoch osových súmerností, znovu tak, aby druhá os splynula s tretou. Znovu dostávame jednoduchú osovú súmernosť.
- Nakoniec nech nenastáva ani jeden z predchádzajúcich prípadov, máme tak novú, doteraz nepopísanú izometriu. Aby sme nahliadli lepšie jej geometriu, nahradíme pôvodné osové súmernosti inými, ktoré po zložení dajú tú istú transformáciu. Najprv nahradíme prvé dve osi otočením okolo ich priesečníka novými osami o'_1, o'_2 tak, aby $o'_2 \perp o_3$. Potom druhé dve (navzájom kolmé) osi otočením okolo ich priesečníka nahradíme osami o''_2, o'_3 tak, aby $o''_2 \parallel o'_1$. (V prípade, keby o_1 a o_2 boli rovnobežné, začneme „točiť“ najprv druhú a tretiu os, potom prvú a druhú.) Vidíme, že ide o zloženie osovej súmernosti a posunutia pozdĺž osi tejto súmernosti. Túto izometriu nazývame **posunutá súmernosť**. 

viac o posunutej súmernosti sa rozpísať?

NA ZAMYSLENIE. Aké pevné body a samodružné priamky má posunutá súmernosť?

NA ZAMYSLENIE. V predchádzajúcom zamyslení ste sa vlastne presvedčili, že os, ktorá sa vynorila v rozklade posunutej súmernosti na osovú súmernosť a s osou rovnobežné posunutie, je jednoznačná, voláme ju **os** posunutej súmernosti. Ako by ste čo najjednoduchšie našli os posunutej súmernosti danej napríklad obrazom trojuholníka?

3. Podobnosti

Zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je **podobnosť** (**podobné zobrazenie**), ak zachováva pomery vzdialenosti bodov:

$$\forall P, Q, R, S \in \mathbb{E}^2 \quad |f(P)f(Q)| : |f(R)f(S)| = |PQ| : |RS|.$$

Iný, trochu dôslednejší popis podobnosti: zobrazenie f je podobnosťou, ak existuje $k \in \mathbb{R}^+$ (konštanta pre celú podobnosť) také, že

$$\forall P, Q \in \mathbb{E}^2 \quad |f(P)f(Q)| = k|PQ|.$$

Číslo k nazývame **koefficientom podobnosti** f .

Zjavne ak $k = 1$, podobnosť je izometriou.

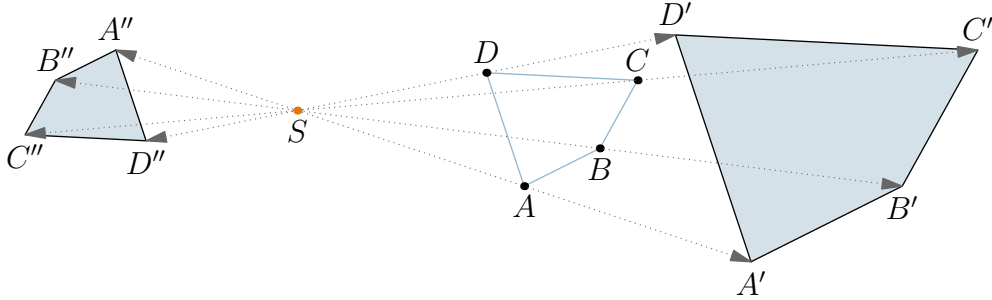
Príklad 3.1. Majme v rovine afinnú súradnicovú sústavu. Nech transformácia f bod so súradnicami (a_1, a_2) zobrazí do bodu $(3a_1, 3a_2)$. Ide o podobnosť s koefficientom 3.

Zobrazenie z príkladu je prípadom špeciálnej triedy podobností. **Rovnoľahlosť** (**homotétia**, z angl. „homothety“) v rovine $\mathbb{E}^2$ určená **stredom** $S \in \mathbb{E}^2$ a **koefficientom** $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ zobrazuje bod A na taký bod $A' \in \overleftrightarrow{AS}$, že

- pre $k > 0$ leží A' na polpriamke $\overrightarrow{SA}$, a pre $k < 0$ leží na opačnej polpriamke,
- $|SA'| = |k||SA|$.

V príklade hore ide o rovnoľahlosť so stredom v začiatku súradníc a s koefficientom 3.

Tvrdenie 3.2. Rovnoľahlosť s koefficientom k je podobnosťou s koefficientom $|k|$.



$A'B'C'D'$ je obrazom $ABCD$ v rovnolahlosti so stredom S a koeficientom 2,
 $A''B''C''D''$ je obrazom $ABCD$ v rovnolahlosti so stredom S a koeficientom $-0,8$.

Dôkaz. Argumentuje sa pomocou podobnosti trojuholníkov.

rozvíeť podrobnejšie???

□

Rovnolahlosť s koeficientom -1 je stredová súmernosť. Inverzným zobrazením k rovnolahlosti s koeficientom k je tiež rovnolahlosť s tým istým stredom a s koeficientom $1/k$.

Veta 3.3. Každá podobnosť sa dá napísať ako zloženie rovnolahlosti a izometrie.

Dôkaz. Nech f je podobnosť s koeficientom k . Zvoľme si ľubovoľnú rovnolahlosť g s tým istým koeficientom k . Potom $g^{-1} \circ f$ je zhodnosť, označme ju h . Podobnosť f sme rozložili:

$$f = g \circ h.$$

□

Dôsledok. Trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú podobné práve vtedy, keď existuje podobnosť f roviny taká, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$.

Poznámka 3.4. Tento dôsledok resp. Veta 2.2 o zhodnosti sa v modernej geometrii vyslovujú ako definície podobnosti resp. zhodnosti trojuholníkov. Výhodou takého prístupu je, že takto môžeme jednotne a jednoducho zdefinovať podobnosť či zhodnosť ľubovoľných útvarov, nielen trojuholníkov.

4. Osová afinita

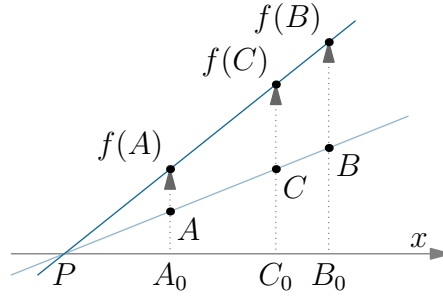
4.1. Afinita roviny. Zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je **afinita**, ak obrazom priamky je priamka a navyše f zachováva deliaci pomer, t.j.

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{E}^2 (P \neq Q \neq R \neq P) : (f(P)f(Q)f(R)) = (PQR).$$

Každá zhodnosť či podobnosť je aj afinitou.

Príklad 4.1. Presvedčíme sa, že afinitou je aj zobrazenie $f : (a_1, a_2) \mapsto (2a_1, a_2)$. Ak je priamka $\overleftrightarrow{AB}$ kolmá na x -os, zobrazí f túto priamku na seba a zachová deliaci pomer bodov na $\overleftrightarrow{AB}$. Ak je priamka $\overleftrightarrow{AB}$ rovnobežná s x -osou, zobrazenie f každý bod priamky posunie o rovnaký vektor v smere kolmom na $\overleftrightarrow{AB}$.

Inak nech P je priesečník $\overleftrightarrow{AB}$ s x -osou a A_0, B_0, C_0 nech sú kolmé priemety bodov A, B, C na x -os.



Z podobnosti $\triangle PA_0A$, $\triangle PB_0B$ a $\triangle PC_0C$ usúdime, že aj trojuholníky $\triangle PA_0f(A)$, $\triangle PB_0f(B)$ a $\triangle PC_0f(C)$ sú podobné a odtiaľ sú body $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ kolíneárne a tiež príslušné pomery dĺžok sú zhodné.

Vidíme, že afinity sú väčšou triedou transformácií $\mathbb{E}^2$ ako podobnosti.

Z definície afinity je zjavné, že zložením dvoch afínit je tiež afinita.

V nasledovnej sérii tvrdení budeme postupne odhaľovať geometrické vlastnosti afinity.

Tvrdenie 4.2. Reštrikcia (zúženie) afinity na ľubovoľnú priamku p je bijekciou medzi bodmi priamok p a $f(p)$.

Dôkaz. Nech P, Q sú také body na priamke p , že $f(P) \neq f(Q)$, t.j. $\overleftrightarrow{f(P)f(Q)} = p'$. Potom každý bod $Y \in p'$, $Y \neq f(P)$, $Y \neq f(Q)$ má v afinite f na priamke p svoj vzor, konkrétne ten bod X pre ktorý $(PQX) = (f(P)f(Q)Y)$. Z jednoznačnosti medzi bodmi priamky a ich deliacimi pomermi vzhľadom na pevne zvolenú dvojicu bodov potom vyplýva, že f zobrazuje priamku p na priamku p' jedno-jednoznačne. $\square$

Dôsledok 1. Afinita roviny je injektívne zobrazenie.

Dôkaz. Ak by pre rôzne body A, B boli ich obrazy v afinite totožné, dostali by sme spor s Tvrdením 4.2 pre priamku $\overleftrightarrow{AB}$. $\square$

Dôsledok 2. V afinite sú obrazom rovnobežných rôznych priamok rovnobežné rôzne priamky.

Tvrdenie 4.3. Nech $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je afinita. Ak A, B, C nie sú kolíneárne, potom ani $f(A), f(B), f(C)$ nie sú kolíneárne.

Dôkaz. Sporom, nech sa nekolíneárne body A, B, C zobrazia na jednu priamku: $f(C) \in \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$. Nech $(f(A)f(B)f(C)) = \lambda$. Potom pre bod $X \in \overleftrightarrow{AB}$ taký, že $(ABX) = \lambda$, platí $f(X) = f(C)$, pričom $X \neq C$, čo je spor. $\square$

Tvrdenie 4.4. Afinita roviny je bijektívne zobrazenie. Inverzným zobrazením k afinite je tiež afinita.

Dôkaz. Injektívnosť sme už vyargumentovali. Surjektívnosť tiež nahliadneme pomerne ľahko: nech p, q sú rovnobežky, ich obrazmi sú tiež rovnobežky $f(p), f(q)$. Ak každým bodom priamky q vedieme rovnobežku k priamke p , táto osnova jednak pokryje rovinu vzorov, a tiež obrazy priamok tejto osnovy zjavne pokrývajú rovinu obrazov – zobrazenie je tak surjektívne.

Keďže ide o bijekciu, existuje inverzné zobrazenie, ktoré je tiež bijekciou. Z Tvrdenia 4.3 vieme usúdiť, že aj toto inverzné zobrazenie zobrazí priamku na priamku. To, že tiež zachováva deliaci pomer, sa ukazuje rovnako, ako sme overili, že inverzným zobrazením k izometrii je tiež izometria:

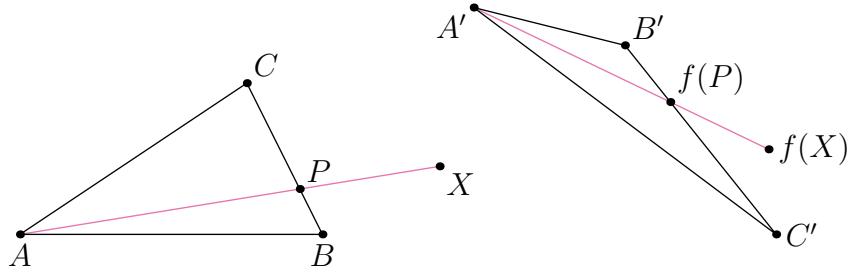
Nech f je pôvodná afinita, ktorá trojicu rôznych kolineárnych bodov A, B, C zobrazí v tomto poradí do trojice A', B', C' . Potom

$$(f^{-1}(A')f^{-1}(B')f^{-1}(C')) = (f^{-1}(f(A))f^{-1}(f(B))f^{-1}(f(C))) = (ABC) = (A'B'C').$$

□

Veta 4.5. Afinita roviny je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov.

Dôkaz.



Nech f je afinita a nech A, B, C sú nekolineárne. Označme $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Nech $X \in \mathbb{E}^2$ je ľubovoľný bod. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\overleftrightarrow{AX} \not\parallel \overleftrightarrow{BC}$. Obraz bodu $P = \overleftrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{BC}$ je na priamke $\overleftrightarrow{B'C'}$ jednoznačne určený deliacim pomerom (BCP) . Následne je obraz bodu $X \in A'f(P)$ jednoznačne určený deliacim pomerom (APX) . □

4.2. Osová afinita.

4.2.1. Ak má afinita f dva pevné body A, B , potom celá priamka $\overleftrightarrow{AB}$ pozostáva z pevných bodov: nech C je ďalší bod na $\overleftrightarrow{AB}$ a nech $(ABC) = \lambda$. Potom $(f(A)f(B)f(C)) = \lambda$, no keďže $f(A) = A$ a $f(B) = B$, platí, že $(ABf(C)) = \lambda$ a teda $C = f(C)$.

Afinitu, ktorej samodružné body tvoria priamku, nazývame **osovou afinitou**. Priamku samodružných bodov nazývame **osou** afinity.

Z Vety 4.5 vyplýva, že osová afinita je jednoznačne určená svojou osou a obrazom jedného bodu, ktorý na nej neleží:

$$f(A) = A, f(B) = B \quad (\text{t.j. } \overleftrightarrow{AB} \text{ je os afinity}), \quad f(C) = C' \neq C.$$

Poznámka 4.6. Identita je afinita roviny, ktorá má tiež priamku pevných bodov, dokonca nekonečne veľa priamok pevných bodov, no medzi osové afinity ju nezaraďujeme. Od osovej afinity vyžadujeme, aby mala striktne jednu priamku pevných bodov a žiaden ďalší pevný bod.

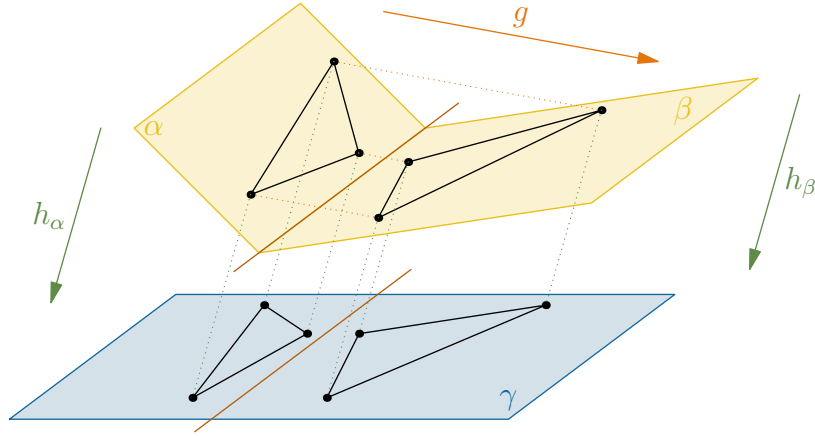
Ak by sme osové afinity skladali, rýchlo zistíme, že zložením dvoch osových afín už nemusíme dostať osovú afinitu – napríklad keď zložením dvoch osových súmerností získame posunutie. Ak by sme však skladali iba osové afinity s tou istou pevne zvolenou osou, vo výsledku máme stále osovú afinitu s touto osou alebo identitu. Toto pozorovanie by nabádalo k rozhodnutiu zaradiť identitu medzi osové afinity.

No na druhej strane, mnohé tvrdenia o vlastnostiach a invariantoch osovej afinity nedávajú pre identitu zmysel. Javí sa preto vhodnejšie identitu medzi osové afinity neradiť, a podľa toho sme osovú afinitu aj definovali.

4.2.2. *Osová afinita ako „záznam“ rovnobežného premietania.* Uvažujme teraz dve rôznobežné roviny $\alpha, \beta \in \mathbb{E}^3$ a smer určený priamkou l takou, že $l \nparallel \alpha, l \nparallel \beta$. Nech β je priemetňou rovnobežného premietania so smerom l a nech g je zúženie tohto premietania na rovinu α , t.j. $g : \alpha \rightarrow \beta$. Ľahko nahliadneme, že g je afinitou:

- obrazom priamky v α je priamka v β ,
- z Tvrdenia 1.1(i) vyplýva, že g zachováva deliaci pomer.

(Niekdedy sa toto zobrazenie zo zrozumiteľných dôvodov nazýva aj osová afinita medzi rovinami.)



V druhom kroku majme tretiu rovinu γ a smer premietania určený priamkou m , ktorá nie je rovnobežná so žiadnou z rovín α, β, γ , a sledujme premietanie h pozdĺž tejto priamky na priemetňu γ . Vidíme, že

- zúženie h na rovinu α je afinita $\alpha \rightarrow \gamma$, označme ju h_α ,
- zúženie h na rovinu β je afinita $\beta \rightarrow \gamma$, označme ju h_β .

Zobrazenie $f = h_\beta \circ g \circ h_\alpha^{-1}$ je afinita $\gamma \rightarrow \gamma$, t.j. afinita euklidovskej roviny s priamkou samodružných bodov $h(p)$, kde $p = \alpha \cap \beta$. Teda pokiaľ f nie je identitou, ide o osoú afinitu.

Teraz naopak, nech teraz f je ľubovoľná osová afinita euklidovskej roviny. Presvedčíme sa, že f je rovnobežným prietomom rovnobežného premietania medzi dvoma rovinami (t.j. osovej afinity medzi rovinami).

Vnorne rovinu, ktorú f transformuje, do $\mathbb{E}^3$ a označme ju γ . Nech $o \subset \gamma$ je os afinity f . Zvolíme si ľubovoľnú rovinu α takú, že o je priesečnica α a γ , a tiež si zvolíme smer rôznobežný s oboma rovinami (priamku m). Nech h je premietanie na γ v smere m . Potom $g : \alpha \rightarrow \gamma$, $g = f \circ h$ je rovnobežné premietanie medzi týmito dvoma rovinami.

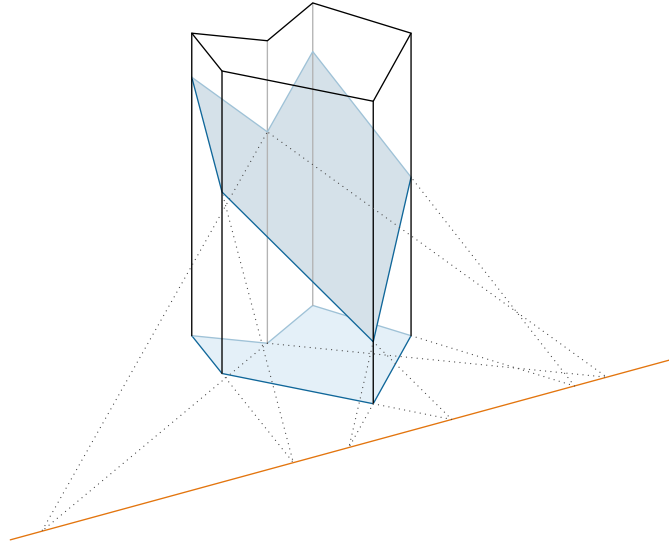
Tvrdenie 4.7. Nech f je osová afinita roviny. Potom pre všetky $A \in \mathbb{E}^2$ neležiace na osi afinity patria priamky $\overleftrightarrow{Af(A)}$ jednej osnove.

Dôkaz. Každú osoú afinitu $\mathbb{E}^2$ môžeme teda vnímať ako rovnobežný prietom rovnobežného premietania medzi dvoma rovinami v $\mathbb{E}^3$. Keď sledujeme situáciu v $\mathbb{E}^3$, teda premietanie $g : \alpha \rightarrow \beta$ so smerom l , pre každý bod $B \in \alpha$ neležiacy na priesečnici $\alpha \cap \beta$ máme, že $\overleftrightarrow{Bg(B)} \parallel l$. Ľubovoľné dva rôzne body $B, C \in \alpha$ mimo priesečnice tak určujú rovnobežky $\overleftrightarrow{Bg(B)}$ a $\overleftrightarrow{Cg(C)}$ v $\mathbb{E}^3$, ktoré sa zobrazujú do rovnobežiek spájajúcich každý bod s jeho obrazom v afinitě f . $\square$

Tvrdenie 4.8. Nech $o \subset \mathbb{E}^2$ je priamka a nech A, A' sú rôzne body neležiace na priamke. Potom existuje práve jedna osová afinita, pre ktorú je o jej osou a ktorá A zobrazí do A'

Dôkaz. Jednoznačnosť vyplýva, ako už bolo spomenuté, z Vety 4.5. O existencii sa presvedčíme napríklad „zdvihnutím“ celej situácie do trojrozmerného priestoru: vnoríme našu rovinu ako rovinu γ do $\mathbb{E}^3$ a zvolíme si rovinu α tak, aby o (striktne: obraz o po vnorení) bola priesečnicou α a γ . Zvolíme ešte smer premietania m rôznobežne s α aj γ a premietneme bod A v tomto smere do roviny α , označíme priemet ako A° . Rovnobežné premietanie $\alpha \rightarrow \gamma$, $A^\circ \mapsto A'$ sa potom spätným premietaním do γ pozdĺž m stane hľadanou afinitou. $\square$

Príklad 4.9. Užitočným dôsledkom úvodného pozorovania v tejto časti je získanie nového pohľadu na konštrukciu rezov hranolových (a čoskoro aj valcových) plôch: dva rezy hranolovou plochou (napríklad podstava a rez danou, s podstavou rôznobežnou rovinou) sú vo vzťahu rovnobežného premietania medzi týmito rovinami, kde smer premietania je smer bočných hrán. Pokiaľ máme situáciu zakreslenú v nejakom rovnobežnom premietaní (napríklad vo voľnom rovnobežnom premietaní), bude rez hranolovej plochy danou rovinou obrazom podstavy v osovej afinite, ktorej osou je priesečnica roviny podstavy a roviny rezu (presnejšie voľný rovnobežný priemet priesečnice).



4.2.3. *Osová afinita v praxi deskriptívnej geometrie.* Nech o je os osovej afinity f a nech bod A neležiaci na o zobrazí f do bodu A' , kde $A' \neq A$, $A' \notin o$. Vieme už, že týmto je osová afinita f jednoznačne určená. Pre skrátenie zápisu budeme pre každý bod X označovať jeho obraz v afinite f ako X' .

Tvrdenie-Definícia 4.10. Nech o je os osovej afinity f a nech f zobrazí $A \notin o$ do A' . Nech $\overleftrightarrow{AA'} \nparallel o$. Potom pre všetky $B \notin o$ platí

- (i) $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{AA'}$,
- (ii) $(B'BB_o) = (A'AA_o)$, kde $A_o = o \cap \overleftrightarrow{AA'}$ a $B_o = o \cap \overleftrightarrow{BB'}$.

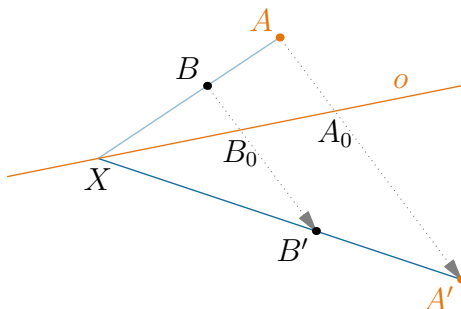
Smer $\overleftrightarrow{AA'}$ nazývame **smerom afinity** a číslo $(A'AA_o)$ **charakteristikou afinity** f .

Ak je smer afinity kolmý na os, hovoríme o **kolmej osovej afinite**.

Dôkaz. O pravdivosti (i) sme sa už presvedčili pomocou interpretácie f ako priemetu rovnobežného premietania, dá sa to ale jednoducho nahliadnuť aj z elementárnych vlastností afinity. Priamka AA' je samodružná, keďže bod A_o sa zobrazí na seba a A na A' . Preto priamka b cez

B rovnobežná s $\overleftrightarrow{AA'}$ sa podľa dôsledku Tvrdenia 4.3 musí zobrazit tiež na rovnobežnú priamku. Keďže $B_0 = b \cap o$ je pevný, leží B tiež na p .

Pre dôkaz (ii) uvažujme $X = o \cap \overleftrightarrow{AB}$. Keďže X je pevný, leží aj na $\overleftrightarrow{A'B'}$ a z podobnosti trojuholníkov dostávame dokazované tvrdenie.



Ak by $\overleftrightarrow{AB}$ bola rovnobežná s osou o , bola by s ňou rovnobežná aj $\overleftrightarrow{A'B'}$ a aj v tomto prípade je tvrdenie (ii) pravdivé. $\square$

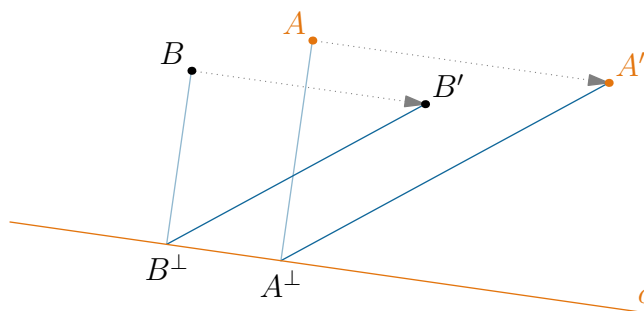
Osová afinita zúžená na priamku rovnobežnú so smerom afinity je teda škálovaním (podobnosťou) tejto priamky s pevným bodom v priesečníku tejto priamky s osou o a škálovacím faktorom rovným charakteristike afinity.

Všimnime si tiež, že postup v dôkaze nám dáva aj návod, ako konštruovať obrazy jednotlivých bodov v danej osovej afinity.

Tvrdenie-Definícia 4.11. Ak pre afinitu f s osou o a bod A neležiaci na osi platí $AA' \parallel o$, potom pre ľubovoľný bod B mimo osi platí $BB' \parallel o$. Takáto osová afinita sa nazýva **elácia** (v počítačovej grafike **skosenie**, angl. **shear**).

Dôkaz. Ide o pomerne priamočiary dôsledok predchádzajúceho tvrdenia: ak by $\overleftrightarrow{BB'}$ bola rovnobežná s osou, potom všetky priamky určené bodom mimo osi a jeho obrazom boli s $\overleftrightarrow{BB'}$ rovnobežné. $\square$

Obraz bodu v elácii nájdeme s využitím faktu, že afinita zachováva rovnobežnosť, viď obrázok.



NA ZAMYSLENIE. Vedeli by ste analyticky popísať osovú afinitu, čiže nájsť predpis, ako zo súradníc bodu vypočítať súradnice jeho obrazu? Tieto vzorce budú jednoduché, ak si vhodne zvolíte súradnicovú sústavu: nech prvá súradnicová os je totožná s osou afinity a druhá súradnicová os nech je

- kolmá na prvú, ak ide o eláciu,

- inak nech je rovnobežná so smerom afinity.

4.3. Grupa afinít roviny.

4.3.1. Osové afinity ako generátory grupy.

Veta 4.12. (a) Nech A, B, C a A', B', C' sú dve trojice nekolineárnych bodov v $\mathbb{E}^2$. Potom existuje práve jedna afinita f taká, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

(b) Každá afinita roviny sa dá napísať ako zloženie najviac troch osových afinít.

Dôkaz. Jednoznačnosť v časti (a) sme už ukázali vo Vete 4.5. Existenciu budeme teraz demonštrovať dôkazom časti (b) Postupovať budeme veľmi podobne ako v dôkaze Vety 2.2, tentokrát je dôkaz jednoduchší.

Ak $A \neq A'$, prvá afinita f_1 nech má takú os, aby žiadny z bodov A ani A' na nej neležal, a nech $f_1(A) = A'$, čo podľa Tvrdenia 4.8 urobiť vieme. Ak $A = A'$, tento krok vynecháme, podobne pri zvyšných dvoch bodoch.

Ak teraz $f_1(B) \neq B'$, za f_2 zvolíme afinitu, ktorej os prechádza bodom A' , neprechádza žiadnym z bodov $f_1(B)$ a B' a nech $f_2(f_1(B)) = B'$.

Dvoma osovými afinitami sme už body A a B zobrazili na A' a B' . Keďže A', B', C' sú nekolineárne a tiež body $A', B', f_2(f_1(C))$ sú nekolineárne (viď Tvrdenie 4.3), priamka $\overleftrightarrow{A'B'}$ neprechádza ani bodom C' , ani bodom $f_2(f_1(C))$. Zvolíme ju za os tretej osovej afinity f_3 a afinitu dourčíme tak, aby $f_3(f_2(f_1(C))) = C'$. $\square$

Vidíme teda, že osová afinita hrá v triede všetkých afinít roviny presne tú istú úlohu, akú hrá osová súmernosť medzi zhodnosťami: je základným prvkom, z ktorých „vyskladáme“ všetky ostatné afinity.

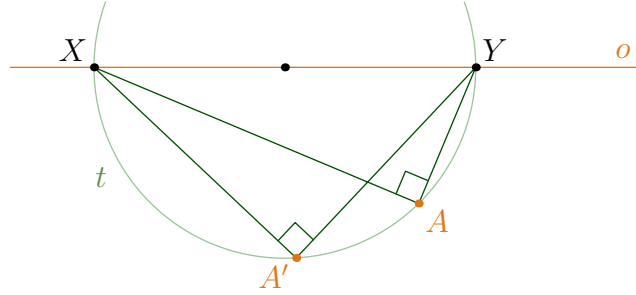
4.3.2. *Hlavné smery afinity.* Pozrieme sa teraz, ako sa kružnica zobrazuje v ľubovoľnej osovej afinitе. Ako medzikrok najprv preskúmame, ako sa kružnica zobrazuje v ľubovoľnej, t.j. nie nutne kolmej, osovej afinitе.

Ak zobrazíme dva kolmé priemery kružnice, nemusia byť aj ich obrazy (t.j. združené priemery elipsy) navzájom kolmé. Platí však, že vždy vieme nájsť takú dvojicu priemerov, ktorých kolmosť sa osovou afinitou zachová, čo je veľmi dôležitá vlastnosť:

Veta-Definícia 4.13. Pre každú osovú afinitu, ktorá nie je osovou súmernosťou, existuje práve jedna dvojica navzájom kolmých smerov, ktorá sa zobrazí na dvojicu tiež navzájom kolmých smerov; túto dvojicu nazývame **hlavnými smermi afinity**.

Dôkaz. Nech f je osová afinita s osou o zobrazujúca bod A do A' . Keďže afinita zachováva rovnobežnosť, stačí pri hľadaní jej hlavných smerov sledovať dvojice kolmých priamok prechádzajúcich bodom A .

Ak $\overleftrightarrow{AA'} \perp o$, potom f je kolmá afinita a o nej už vieme, že jej hlavné smery sú smer rovnobežný s osou o a smer kolmý na o .



Nech teda $\overleftrightarrow{AA'} \not\perp o$. Potom existuje jediná kružnica so stredom na osi o prechádzajúca bodmi A aj A' , označme ju t . Nech X a Y sú priesečníky t s osou o . Z Tálesovej vety sú uhly $\angle XAY$ a $\angle XA'Y$ pravé. Navyše úsečka $A'X$ je obrazom úsečky AX , podobne $A'Y$ je obrazom AY . Vidíme, že obrazom na seba kolmých priamok $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{AY}$ sú na seba kolmé priamky $\overleftrightarrow{A'X}$ a $\overleftrightarrow{A'Y}$. Z konštrukcie tiež ľahko usúdime, že ide o jedinú dvojicu takýchto smerov. $\square$

Poznámka 4.14. Každá osová afinita sa dá napísať ako zloženie podobnosti a kolmej osovej afinity.

Dôkaz. Nech f je osová afinita s osou o zobrazujúca bod A do A' . Nech U, V sú také body, že $\overleftrightarrow{AU}, \overleftrightarrow{AV}$ určujú hlavné smery f a navyše nech $|AU| = |AV|$. Označme $U' = f(U)$ a $V' = f(V)$. Potom $A'U' \perp A'V'$.

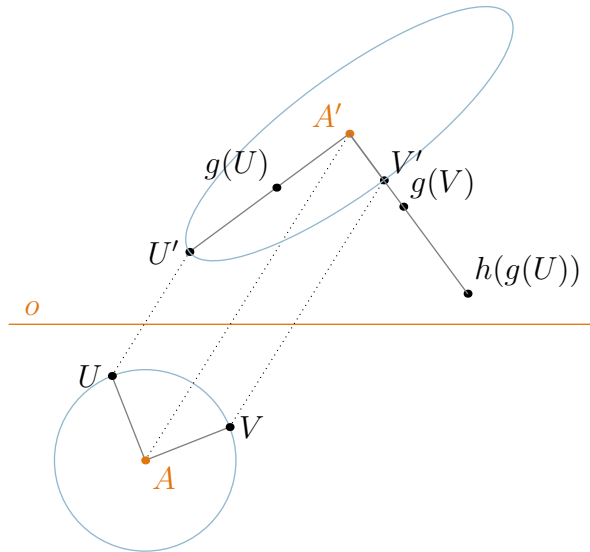
Nech $g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je taká zhodnosť, že

$$g(A) = A', \quad g(U) \in \overleftrightarrow{A'U'}, \quad g(V) \in \overleftrightarrow{A'V'},$$

(g napríklad zložíme z posunutia, otočenia a prípadne osovej súmernosti). Následne nech h je rovnoláhosť so stredom A' , ktorá $g(U)$ zobrazí na U' . Nakoniec ešte pridáme kolmú osovú afinitu k , ktorej os je $\overleftrightarrow{A'U'}$ a ktorá $h(g(V))$ zobrazí na V' . Keďže ľubovoľná afinita je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov (Veta 4.5), platí

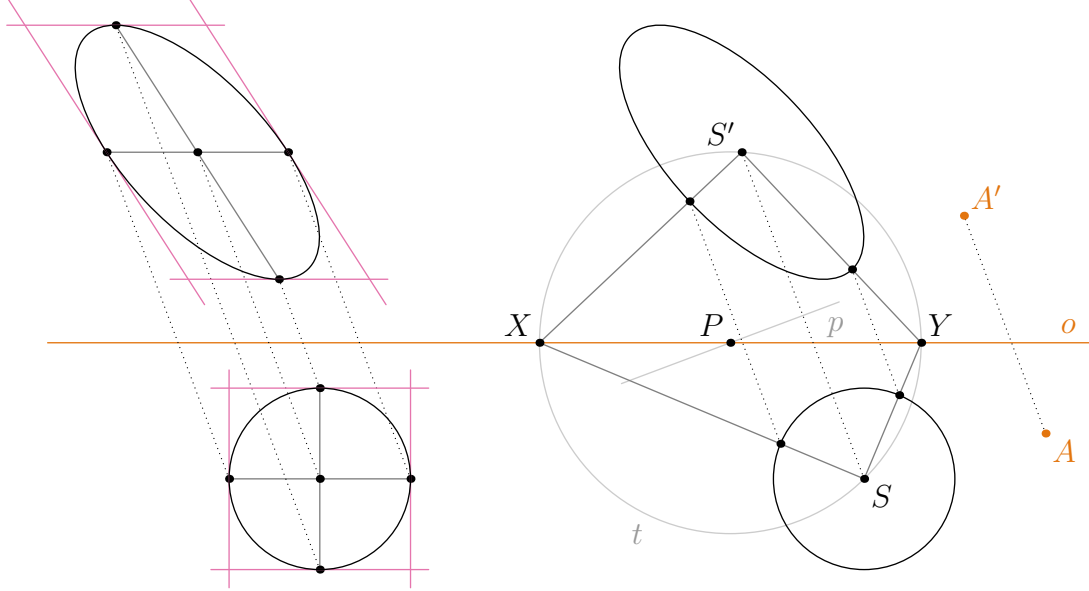
$$f = k \circ h \circ g,$$

kde $h \circ g$ je podobnosť a k je kolmá afinita.



□

Obrazom kružnice v osovej afinite je preto elipsa s tými istými vlastnosťami, ktoré sme odvodili v časti o kolmej afinite. Dôkaz Vety 4.13 navyše poskytuje návod, ako v osovej afinite f s osou o nájsť osi elipsy, ktorá je v tejto afinite obrazom kružnice k so stredom S :



- (1) nájdeme obraz stredy S kružnice: $S' = f(S)$,
- (2) nech p je os úsečky SS' ,
- (3) $P = o \cap p$,
- (4) zostrojíme kružnicu $t(P, |PS|)$,
- (5) nájdeme priesečníky X, Y osi o a kružnice t ,
- (6) priesečníky $SX \cap k$ a $SY \cap k$ sa zobrazia na hlavný a vedľajší vrchol elipsy.

Veta 4.15. Lubovoľná afinita sa dá napísať ako zloženie podobnosti a kolmej osovej afinity.

Dôkaz. Každá afinita je jednoznačne určená obrazmi svojich troch nekolineárnych bodov (Veta 4.5). Nech teda afinita f zobrazí nekolineárne body A, B, C na A', B', C' . Ako v predchádzajúcom dôkaze, aj teraz vyskladáme f z elementárnejších zobrazení.

Nech najprv g je zhodnosť, ktorá polpriamku $\overrightarrow{AB}$ zobrazí na polpriamku $\overrightarrow{A'B'}$ (teda bod A na bod A'). Následne nech rovnoláhosť h so stredom A' zobrazí bod $g(B)$ na bod B' . Nakoniec nech osová afinita j s osou $\overleftrightarrow{A'B'}$ zobrazí bod $h(g(C))$ na C' . Máme tak, že

$$f = j \circ h \circ g,$$

keďže sa tieto dve afinity zhodujú v troch nekolineárnych bodoch. Navyše vieme už, že j vieme napísať ako zloženie podobnosti p a kolmej afinity k , teda

$$f = k \circ p \circ h \circ g,$$

kde k je kolmá afinita a $p \circ h \circ g$ je podobnosť. □

Poznámka 4.16. Analógia tohto tvrdenia pre n -rozmerný priestor je v matematike známa pod názvom *singulárny rozklad matice* (anlg. *SVD*, *singular value decomposition*). Geometricky: každá afinná transformácia n -rozmerného priestoru sa dá napísať ako zloženie izometrie a následného škálovania v n smeroch, ktoré sú navzájom na seba kolmé.

5. Osová kolineácia

Zhrňme si triedy bijektívnych transformácií roviny, s ktorými sme sa už stretli a pripomeňme si ich základné invarianty:

- *zhodnosť* zachováva dĺžky úsečiek,
- *podobnosť* zachováva pomery dĺžok úsečiek,
- *afinita* zachováva deliaci pomer; afinitu by sme tiež mohli charakterizovať ako zobrazenie, ktoré zachováva kolinearitu a pomery dĺžok úsečiek ležiacich na jednej priamke (t.j. reštrikcia afinity na priamku je podobnosť medzi priamkami).

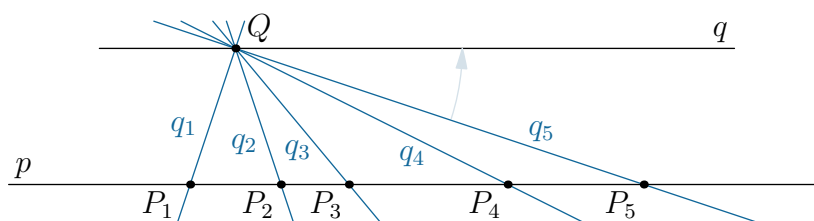
Upustíme na záver od požiadavky, že sa má zachovávať deliaci pomer. Zobrazenie, ktoré ľubovoľné navzájom rôzne kolineárne body zobrazí na navzájom rôzne kolineárne body, sa nazýva **kolineácia**.

Poznámka 5.1. Kolineácie už naozaj deliaci pomer zachovať nemusia, dá sa však ukázať, že stále majú jeden invariant, a síce zachovávajú **dvoj pomer - odkaz na 1.2** štvorice bodov.

Aby sme však mohli kolineácie poriadne popísať, musíme najprv obohatiť euklidovský priestor o nové body.

5.1. Rozšírený euklidovský priestor.

Príklad 5.2. Nech $p \subset \mathbb{E}^2$ a $Q \in \mathbb{E}^2$, $Q \notin p$. Sledujme priamky prechádzajúce bodom Q . Ak



$q \parallel p$ ($q \ni Q$), tak sa priamky p a q nepretnú. Ak uvažujeme postupnosť priamok q_i cez bod Q takú, že ich uhol s priamkou p sa blíži k 0 (teda $q_i \rightarrow q$), tak spoločný priesečník $P_i = p \cap q_i$ diverguje do nekonečna. Okrem priamky q vidíme prirodzenú bijekciu medzi bodmi P_i priamky p a priamkami zväzku so stredom Q . Doplňme priamku p o nový bod, ktorý bude reprezentovať priesečník p a q (v $\mathbb{E}^2$ neexistujúci). Tento bod nazveme **nevlastným bodom** priamky p a budeme ho označovať p_∞ .

Ak r je ľubovoľná iná priamka rovnobežná s priamkou p , znovu bude existovať bijekcia medzi bodmi priamky r a priamkami prechádzajúcimi bodom Q . Znovu to bude priamka q , ktorá bude reprezentovať nevlastný bod q_∞ priamky q .

Vidíme, že je tak zmysluplné obohatiť rovinu $\mathbb{E}^2$ o nevlastné body tak, že

$$p_\infty = r_\infty \quad \text{práve vtedy, keď} \quad p \parallel r.$$

Jeden nevlastný bod roviny tak reprezentuje celú osnovu navzájom rovnobežných priamok. Ak $\mathbb{E}_\infty^2$ označuje množinu všetkých nevlastných bodov euklidovskej roviny:

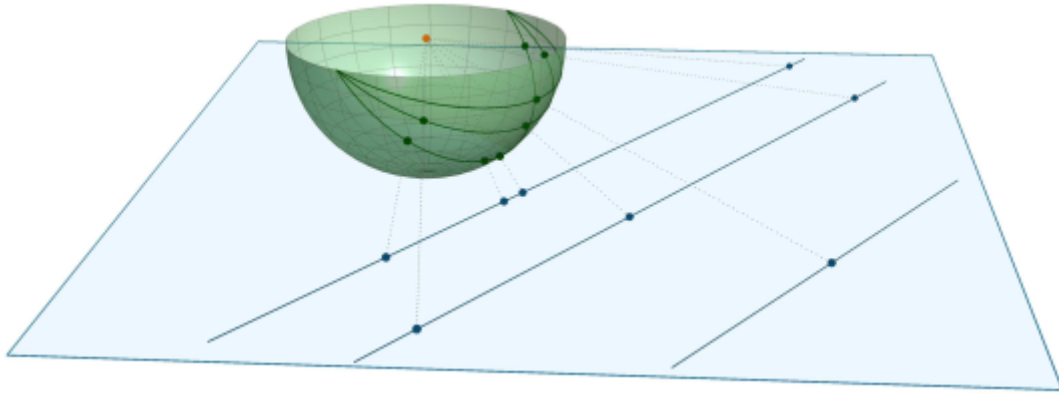
$$\mathbb{E}_\infty^2 = \{p_\infty \mid p \subset \mathbb{E}^2 \text{ je priamka}\},$$

potom **rozšírená euklidovská rovina** je množina

$$\overline{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^2 \cup \mathbb{E}_\infty^2.$$

Čo vieme povedať o množine $\mathbb{E}_\infty^2$ nevlastných bodov euklidovskej roviny?

Príklad 5.3 (gnómonická projekcia). Nech sa sféra južným pólom dotýka roviny. Premietaním, ktorého stredom je stred sféry, konštruujeme bijekciu medzi bodmi $\mathbb{E}^2$ a južnou polsférou, viď obrázok. Obrazom priamky v $\mathbb{E}^2$ na polsfére je kružnicový oblúk medzi dvoma protilahlými



Gnómonická projekcia.

bodmi na rovníku. Lahko sa presvedčíme, že rovnobežné priamky zodpovedajú oblúkom s tými istými koncovými bodmi. Dvojicu protilahlých bodov na rovníku tak môžeme stotožniť s nevlastným bodom príslušnej osnovy priamok. Zaujímavým pozorovaním je, že všetky nevlastné body môžeme vidieť ako rovníkovú polkružnicu. Je preto pochopiteľné, že množina všetkých nevlastných bodov roviny tvorí priamku.

Ďalší dôvod, prečo množinu nevlastných bodov vnímať ako priamku, nám dáva požiadavka, že pre ľubovoľné dva rôzne body by mala existovať práve jedna priamka, ktorá oboma prechádza. Žiadna z priamok $\mathbb{E}^2$ po rozšírení roviny neprechádza dvoma nevlastnými bodmi, preto musíme rozšírenú rovinu obohatiť aj o novú priamku – nevlastnú.

Neskôr sa stretnete s ďalšími fenoménmi, ktoré nás presvedčajú, že množinu nevlastných bodov roviny je vhodné považovať za priamku – dokonca priamku úplne rovnocennú s ostatnými (Desarguesova veta, analytická geometria).

Rovnako, ako sme rozšírili euklidovskú priamku a euklidovskú rovinu, môžeme rozšíriť aj euklidovský priestor. Nech

$$\mathbb{E}_\infty^3 = \{p_\infty \mid p \subset \mathbb{E}^3 \text{ je ľubovoľná priamka}\},$$

je množina všetkých nevlastných bodov priestoru $\mathbb{E}^3$, potom **rozšírený euklidovský priestor** je

$$\overline{\mathbb{E}^3} = \mathbb{E}^3 \cup \mathbb{E}_\infty^3$$

Analogicky k už uvedenému, množina $\mathbb{E}_\infty^3$ všetkých nevlastných bodov priestoru tvorí rovinu. Množina α_∞ nevlastných bodov ľubovoľnej roviny α tvorí priamku pozostávajúcu z nevlastných bodov priamok ležiacich v rovine α .

V rozšírenej euklidovskej rovine každé dve priamky majú spoločný bod: v prípade, že v $\mathbb{E}^2$ boli dve priamky rovnobežné, v $\overline{\mathbb{E}^2}$ sa pretali v spoločnom nevlastnom bode. Podobne v rozšírenom priestore $\overline{\mathbb{E}^3}$ každé dve rôzne roviny majú spoločnú priesečnicu; roviny, ktoré boli v $\mathbb{E}^3$ rovnobežné, sa v $\overline{\mathbb{E}^3}$ pretnú v nevlastnej priamke. Podobne k vzájomnej polohe roviny a priamky: pokiaľ priamka v rovine neleží, má s ňou spoločný presne jeden bod, možno nevlastný.

Prirodzene a pomerne mechanicky môžeme definíciu rozšíreného euklidovského priestoru zo-
všeobecniť pre ľubovoľnú dimenziu.

Poznámka 5.4. Rozšírený euklidovský priestor je projektívnym priestorom (ten budete syste-
matickejšie skúmať neskôr), v ktorom sme jednu z nadrovín označili ako nevlastnú, t.j. nadrovinu
nevlastných bodov. Oproti štandardnému projektívnemu priestoru máme aj metriku, táto je však
definovaná len na množine vlastných bodov.

Poznámka 5.5. Ak v projektívnej rovine „zrovnoprávnime“ nevlastné body s vlastnými, rov-
nobežnosť priamok prestáva existovať. Podobne v projektívnom priestore napríklad dve roviny
už nemôžu byť rovnobežné. My napriek tomu budeme stále o rovnobežnosti hovoriť, lebo projek-
tívny priestor budeme vnímať ako rozšírený euklidovský priestor. V ňom o každom bode vieme,
či je vlastný alebo nevlastný: napríklad metrika je definovaná iba pre vlastné body priestoru.
Preto pod rovnobežnosťou budeme rozumieť, že spoločný body dvoch priamok je nevlastný,
analogicky ostatné prípady.

5.2. Stredové premietanie v priestore. Gnómonická projekcia je zúžením nasledovného
zobrazenia.

Nech $\pi \subset \mathbb{E}^3$ je rovina a nech $S \in \mathbb{E}^3$ je bod taký, že $S \notin \pi$. Pre každý bod $A \in \mathbb{E}^2$, $A \neq S$,
uvažujme priamku $l_A = \overleftrightarrow{SA}$ (**premietacia priamka bodu A**). Ak l_A nie je rovnobežná s rovinou
 π , pretne ju v nejakom bode A' . **Stredové premietanie** určené **stredom S** a **priemetňou π**
je zobrazenie, ktoré bodu A priradí bod A' .

Stredové premietanie zjavne nie je definované na celom priestore $\mathbb{E}^3$: body ležiace v rovine ι
takej, že $\iota \parallel \pi$, $\iota \ni S$, zobraziť nevieme. Toto sa však zmení, ak namiesto $\mathbb{E}^3$ budeme pracovať v
rozšírenom priestore $\mathbb{E}^3$. V takom prípade vieme bez problémov dodefinovať obraz ľubovoľného
bodu A , ktorý je rôzny od S : v prípade, že $A \in \iota$, bude jeho obrazom A' nevlastný bod priemetne
 π . Tiež vieme bez problémov dodefinovať priemety ostatných nevlastných bodov priestoru $\overline{\mathbb{E}^3}$.

5.2.1. Obraz priamky v stredovom premietaní. Uvažujme stredové premietanie dané stre-
dom S a priemetňou π . Nech p je priamka.

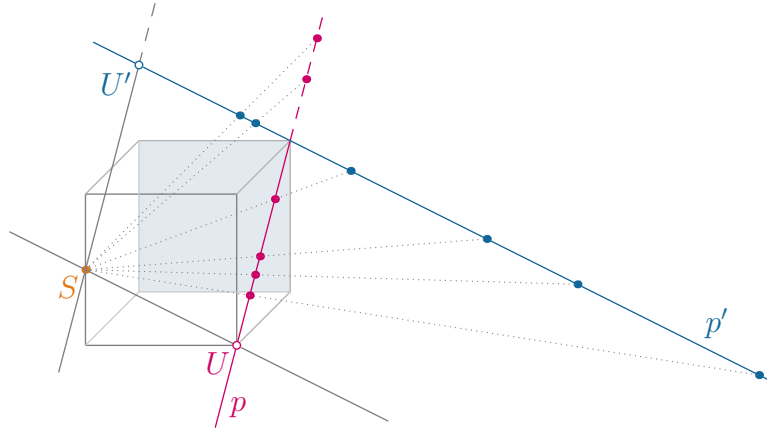
- Ak $p \ni S$, potom p je aj premietacou priamkou každého svojho bodu, teda priemetom
celej priamky je bod $p \cap \pi$, ktorý je vlastný, ak $p \not\subset \iota$, a nevlastný, ak $p \subset \iota$.

Vo všeobecnejšom prípade, keď $p \not\ni S$, je premietacím útvarom (množinou tvorenou premietacími
priamkami bodov) priamky p rovina prechádzajúca S a p . Priemetom priamky p je tak priamka
 $p' \subset \pi$. Rozanalyzujeme si situáciu podrobnejšie.

- Ak $p \subset \iota$, zobrazí sa táto priamka na nevlastnú priamku priemetne: $p' = \pi_\infty$.
- Ak $p \parallel \pi$ a $p \not\subset \iota$, je zúženie zobrazenia ι na priamku p podobnosťou medzi priamkami p
a p' , teda dokonca zachováva deliaci pomer bodov na tejto priamke (Tvrdenie 1.1, (ii)).
- Vo všeobecnom prípade, t.j. keď $p \not\parallel \pi$, sa deliaci pomer bodov na priamke nezachová-
va, zachováva sa dvojpomer (Tvrdenie 1.4). Bod $p \cap \iota$ priamky p v euklidovskom
priestore priemet nemá, v rozšírenom priestore sa zobrazuje na nevlastný bod priamky
 p' . Zaujímavým je aj bod

$$q \cap \pi \quad \text{kde} \quad q \text{ je priamka } q \parallel p, q \ni S.$$

Ide o bod priamky p' , ktorý nemá na priamke p vzor. Ak však uvažujeme aj nevlastné body
priestoru, potom $q \cap \pi \in p'$ je obrazom nevlastného bodu p_∞ priamky p , nazývame ho **úbežník**
priamky p. Analogicky bod $p \cap \iota$ priamky p sa zobrazuje na bod p'_∞ a odkazujeme sa naň ako
na **úbežník priamky p'**: situáciu totiž môžeme vnímať aj tak, že priamka p je obrazom priamky
 p' v premietaní so stredom S .



Priamka v stredovom premietaní, priemetňou je rovina zadnej steny kocky. Bod U' je úbežníkom priamky p , bod U je úbežníkom priamky p' .

5.2.2. *Obraz roviny v stredovom premietaní.* Znovu majme stredové premietanie so stredom S a priemetňou π . Skúmame, ako sa v tomto premietaní zobrazujú body roviny α .

- Ak $\alpha \ni S$, je obrazom roviny α priamka $\alpha \cap \pi$, nevlastná, ak $\alpha = \iota$, inak vlastná.
- Ak $\alpha \not\ni S$, $\alpha \parallel \pi$, je obrazom roviny α rovina π , presnejšie množina vlastných bodov roviny α sa bijektívne zobrazí na množinu vlastných bodov roviny π . Toto zobrazenie $\alpha \rightarrow \pi$ je podobnosťou medzi rovinami.
- Všeobecne, nech $\alpha \not\ni S$, $\alpha \not\parallel \pi$. Vtedy ak uvažujeme iba vlastné body oboch rovín, potom body roviny α ležiace aj v rovine ι nemajú obraz; pokiaľ ale pracujeme aj s nevlastnými bodmi, zobrazia sa tieto body roviny α na nevlastnú priamku priemetne π . (Mmch toto je ďalší dôvod, prečo sme sa množinu bodov rozhodli nazývať priamkou.) Analogicky v priemetni π máme priamku bodov, do ktorých sa nezobrazia vlastné body roviny α , zobrazujú sa na ňu však nevlastné body. Tento dôležitý prípad si popíšeme bližšie.

5.3. Kolineácia medzi rovinami.

5.3.1. Nech $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^3$ sú rôznobežné roviny a nech $S \in \mathbb{E}^3$ je bod nepatriaci ani jednej z týchto dvoch rovín. Nech S je stred premietania a β je priemetňa. Z pozorovaní v odseku 5.2.1 vidíme, že reštrikcia tohto stredového premietania na rovinu β :

$$k : \alpha \rightarrow \beta$$

je kolineáciou medzi rovinami α a β . Bod S nazývame **stredom** a priesečnicu $o = \alpha \cap \beta$ **osou** kolineácie k .

Zhrňme si, že:

- k je bijektívne zobrazenie rozšírených rovín $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$,
- inverzné zobrazenie $k^{-1} : \beta \rightarrow \alpha$ je reštrikciou premietania s tým istým stredom S na priemetňu α .

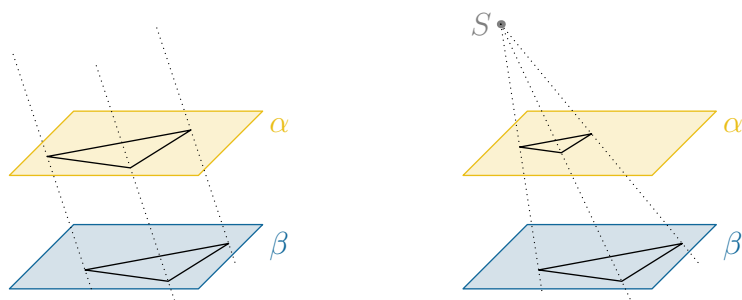
Z vlastností zobrazenia k je zjavné, prečo toto zobrazenie nazývame kolineáciou *medzi rovinami*: obe roviny sú si vzhľadom na k akosi rovnocenné. Priamku v rovine β , ktorá je obrazom nevlastnej priamky roviny α v kolineácii k , voláme **úbežnicou roviny α** . Priamku v rovine α , ktorá sa zobrazí do nevlastnej priamky roviny β , zas **úbežnicou roviny β** .

Tvrdenie 5.6. Obe úbežnice kolineácie medzi dvoma rovinami, ktorá je reštrikciou stredového premietania, sú rovnobežné s osou tejto kolineácie.

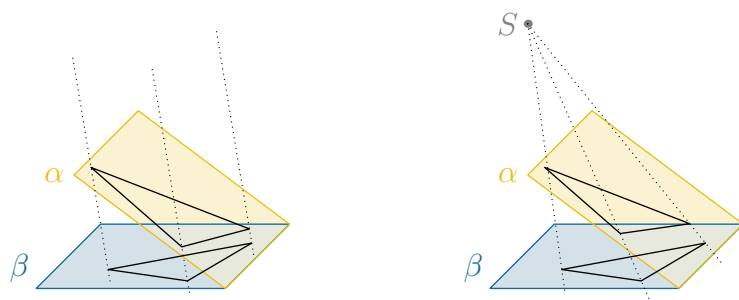
Dôkaz. So zavedeným označením, úbežnica roviny β je priesečnicou rovín α a ι , kde $\iota \ni S$ a $\iota \parallel \beta$, preto je táto úbežnica rovnobežná s osou o . Tak isto sa vyargumentuje rovnobežnosť druhej úbežnice. $\square$

Príklad 5.7. Pohrajme sa trochu s kolineáciou medzi dvoma rovinami a s nevlastnými bodmi. Ak stred S kolineácie k posunieme do nevlastného bodu rozšíreného euklidovského priestoru (mimo nevlastných bodov rovín α_1 a α_2), stredové premietanie sa zmení na rovnobežné. Podobne os o môžeme skúsiť posunúť do nevlastnej roviny $\mathbb{E}_\infty^3$. Skúmame chvíľu tieto jednotlivé situácie. Určite v každom prípade sa kolineárne body zobrazia na kolineárne a naopak, vzorom kolineárnych bodov je tiež kolineárna množina. Pri každej situácii sa aj na chvíľu zamyslíme nad ďalšími jej invariantami, teda vlastnosťami či vzťahmi, ktoré sa zobrazením zachovávajú:

- (a) $S \in \mathbb{E}_\infty^3$, $o \subset \mathbb{E}_\infty^3$ – ide o posunutie medzi dvoma rovinami. Zobrazenie $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ zachováva vzdialenosti bodov, inými slovami: ide o izometriu;
- (b) $o \subset \mathbb{E}_\infty^3$ – rovnoláhosť medzi rovinami. Vzdialenosti bodov sa nezachovávajú, no zachovávajú sa pomery vzdialeností; zobrazenie je podobnosťou;
- (c) $S \in \mathbb{E}_\infty^3$ – afinita medzi rovinami. Toto zobrazenie už pomery vzdialeností nezachováva, no zachováva deliaci pomer trojíc kolineárnych bodov, teda ide o afinné zobrazenie;
- (d) ani stred ani os kolineácie neležia v nevlastnej rovine – kolineácia medzi rovinami. Toto zobrazenie už deliaci pomer nezachováva.



Kolineácie medzi rovinami, ktorých priesečnicou je nevlastná priamka.



Kolineácie medzi rovinami, ktoré sú v $\mathbb{E}^3$ rôznobežné.

Poznámka 5.8. V skutočnosti všetky rozobrané prípady môžeme nazvať kolineáciami, keďže rôzne kolineárne body zobrazia na rôzne kolineárne body. Prípád (d) sa pre upresnenie či rozlíšenie niekedy nazýva aj stredovou/osovou kolineáciou medzi rovinami, či perspektívnou kolineáciou.

Tvrdenie 5.9. Stredová kolineácia medzi rovinami zachováva dvojpomer štvoríc bodov.

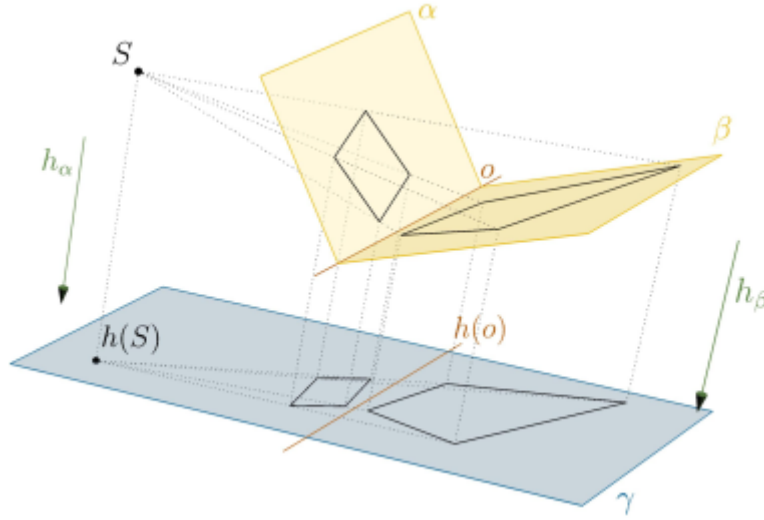
Dôkaz. Nech k je kolineácia medzi α a β so stredom S . Ak $A, B, C, D \in \alpha$ sú rôzne kolineárne body, obmedzíme sa na rovinu $\overleftrightarrow{AB\vec{S}}$ a použijeme Tvrdenie 1.4. $\square$

5.3.2. *Priemet kolineácie medzi rovinami.* Pokračujme s popísanou kolineáciou k medzi rôznobežnými rovinami α a β v priestore $\mathbb{E}^3$ so stredom $S \in \mathbb{E}^3$ a osou $o = \alpha \cap \beta$. Nech $h : \mathbb{E}^3 \rightarrow \gamma$ je rovnobežné premietanie zvolené tak, aby $h(\alpha) = h(\beta) = \gamma$. Teda reštrikcie projekcie h :

$$h_\alpha = h|_\alpha$$

$$h_\beta = h|_\beta$$

sú bijekciami medzi rovinami α a γ resp. β a γ . Kolineácia k je bijekciou $\overline{\alpha} \rightarrow \overline{\beta}$ v rozšírenej euklidovskej rovine.



Všetky doteraz uvažované projekcie h_α , h_β , k , aj k nim inverzné zobrazenia zachovávajú kolinearnosť bodov. Preto aj zložené zobrazenie

$$\kappa = h_\beta \circ k \circ h_\alpha^{-1} : \overline{\gamma} \rightarrow \overline{\gamma}$$

je kolineáciou.

Tvrdenie-Definícia 5.10.

- (i) Obraz priesečnice $\alpha \cap \beta$ (osi kolineácie k) v premietaní h je silne samodružnou priamkou kolineácie κ .
- (ii) Obraz bodu S (streda kolineácie k) je samodružný bod kolineácie κ a navyše všetky priamky roviny γ prechádzajúce týmto bodom sú samodružnými priamkami zobrazenia κ – taký bod budeme nazývať **silne samodružným bodom**.

Dôkaz. (i) Tvrdenie vyplýva z faktu, že o je spoločnou priamkou rovin α a β , teda každý bod priamky o sa v kolineácii k zobrazí sám na seba (pred zobrazením chápaný ako bod roviny α a po zobrazení zas ako bod roviny β) a pre body $X \in o$ platí $h_\alpha(X) = h_\beta(X)$.

(ii) **obrazok???**

Nech $S' = h(S) \in \gamma$. Bod S' je v premietaní h obrazom nielen bodu S , ale aj ostatných bodov priamky l_S (premietacia priamka bodu S), špeciálne bodov $l_S \cap \alpha$ a $l_S \cap \beta$. Priamka l_S je zároveň premietacu priamkou bodu $l_S \cap \alpha$ v kolineácii k . Máme tak

$$\kappa(S') = h_\beta \circ k \circ h_\alpha^{-1}(S') = h_\beta \circ k(l_S \cap \alpha) = h_\beta(l_S \cap \beta) = S'.$$

Analogicky ak $p \subset \gamma$ je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom S' , je premietacia rovina prisúchajúca priamke p tá istá pre zobrazenia h_α, h_β, k , z čoho je zjavné, že p je samodružnou priamkou kolineácie κ . $\square$

Priamku $o' \subset \gamma = h(o)$ nazývame **osou** a bod $S' \in \gamma = h(S)$ **stredom** kolineácie κ . Ak $S' \in o$, nazývame kolineáciu κ **eláciou**.

Obrazy úbežníc kolineácie k nazývame **úbežnicami** kolineácie κ . Z Tvrdenia 5.6 a z faktu, že h je rovnobežné premietanie, vidíme, že úbežnice kolineácie κ sú rovnobežné s osou tejto kolineácie.

todo: Pohľad na rez ihlanovej/kužeľovej plochy cez kolineáciu κ ???

5.4. Kolineácie v rovine. Uvažujme rovinu $\mathbb{E}^2$ a jej projektívne rozšírenie $\overline{\mathbb{E}^2}$. Nech κ je ľubovoľná kolineáciou v tejto rovine, t.j. zobrazenie, ktoré rôzne kolineárne body zobrazí na rôzne kolineárne body.

Úbežnica kolineácie κ je priamka, ktorá je vzorom alebo obrazom nevlastnej priamky $\mathbb{E}_\infty^2$.

Tvrdenie-Definícia 5.11. Nech κ je kolineácia v rovine rôzna od identity. Potom

- (a) κ má najviac jednu silne samodružnú priamku; ak takáto priamka existuje, nazývame kolineáciu **osovou** a silne samodružnú priamku nazývame jej **osou**,
- (b) κ má najviac jeden silne samodružný bod; ak takýto bod existuje, nazývame kolineáciu **stredovou** a silne samodružný bod nazývame jej **stredom**.

Dôkaz. (a) Nech p, q sú silne samodružné a nech A je ľubovoľný bod neležiacy na žiadnej z nich. Vedme bodom A dve rôzne priamky r_1 a r_2 . Body $r_1 \cap p$ a $r_1 \cap q$ sú pevné, preto je priamka r_1 samodružná, podobne pre r_2 . Keďže $A \in r_1$ aj $A \in r_2$, je A pevný bod kolineácie, teda kolineácia by musela byť identitou.

(b) Nech S, T sú silno samodružné body. Nech A je ľubovoľný bod rôznych neležiacy na $\overleftrightarrow{ST}$. Priamky $\overleftrightarrow{AS}$ a $\overleftrightarrow{AT}$ sú podľa predpokladu samodružné, preto A je pevný bod. V faktu, že ide o kolineáciu, potom tvrdenie platí aj pre body na $\overleftrightarrow{ST}$. $\square$

Lema 5.12. Nech κ je osová kolineácia roviny a nech bod A neleží na osi kolineácie κ .

- (i) Ak A je samodružný, potom je silne samodružný.
- (ii) Ak A nie je samodružný, potom je samodružnou priamka $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$.

Dôkaz. (i) Každá priamka p prechádzajúca bodom A má dva pevné body: A aj $p \cap o$, a preto je samodružnou. Teda A je silne samodružný bod.

- (ii) Ak $A^o = \overleftrightarrow{A\kappa(A)} \cap o$, tak $\kappa(\overleftrightarrow{A^o A}) = \overleftrightarrow{A^o \kappa(A)} = \overleftrightarrow{A^o A}$. $\square$

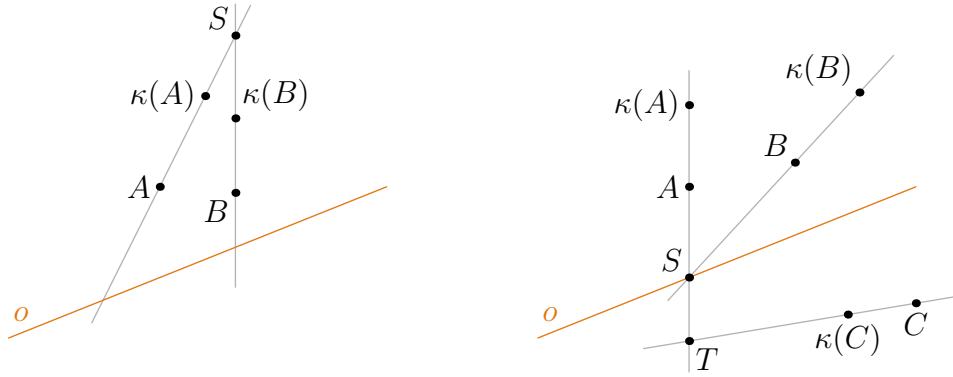
V predchádzajúcom odseku (5.3.2 Priemet kolineácie medzi rovinami) sme za os resp. stred kolineácie považovali vždy vlastnú priamku resp. vlastný bod. Naozaj je práve toto situácia, s ktorou sa v praxi deskriptívnej geometrie stretávame. V skutočnosti ale nič nebráni vziať

napríklad ako stred kolineácie niektorý nevlastný bod. Keď toto pripustíme, môžeme ukázať nasledovnú vetu.

Veta 5.13.

- (i) Osová kolineácia roviny je aj stredovou kolineáciou.
- (ii) Stredová kolienácia roviny je aj osovou kolienáciou.

Dôkaz. (i) Nech o je os kolineácie κ . Nájdeme stred kolineácie κ .



Hľadanie stredu osovej kolineácie, vľavo: stred je mimo osi, vpravo: na osi

Nech A je bod neležiaci na osi. Ak A je samodružný, tak je podľa Lemy 5.12(i) už stredom kolineácie. Nech teda A nie je samodružný bod. Nech B je ďalší bod neležiaci ani na osi o ani na priamke $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$. Ak B nie je samodružný (inak by bol už stredom kolineácie), máme samodružné priamky $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ a $\overleftrightarrow{B\kappa(B)}$ (Lema 5.12(ii)). Potom bod $S = \overleftrightarrow{A\kappa(A)} \cap \overleftrightarrow{B\kappa(B)}$ je samodružný.

Ak S neleží na osi o , je silne samodružným (Lema 5.12(i)), a teda stredom kolineácie κ .

Nech $S \in o$. Nech C je bod neležiaci na žiadnej z priamok o , $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ a $\overleftrightarrow{B\kappa(B)}$. Predpokladajme, že samodružná priamka $\overleftrightarrow{C\kappa(C)}$ neprechádza bodom S . Potom $T = \overleftrightarrow{C\kappa(C)} \cap \overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ by bol samodružný bod neležiaci na osi o , išlo by teda o silne samodružný bod. Potom aj priamka $\overleftrightarrow{BT}$ by bola samodružná, a keďže $\overleftrightarrow{BT} = \overleftrightarrow{B\kappa(B)}$, priamky $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ a $\overleftrightarrow{B\kappa(B)}$ by sa pretali v dvoch rôznych bodoch S a T .

(ii) Pri konštrukcii dôkazu sa môžeme oprieť o princíp duality, veľmi často využívaný v projektívnej rovine. Body a priamky sú navzájom duálnymi konceptami: tak ako ľubovoľné dva rôzne body jednoznačne určujú priamku, tak aj dve rôzne priamky jednoznačne určujú bod – ich priesečník. Podobne ako každá priamka obsahuje nekonečne veľa bodov, na druhej strane každým bodom prechádza nekonečne veľa priamok. Z dôkazu v časti (i) skonštruujeme dôkaz tvrdenia (ii) tak, že slovo „priamka“ nahradíme slovom „bod“ a naopak, slová „ležať na“ nahradíme spojením „prechádzať cez“ atď. Najprv sformulujeme a dokážeme duálne tvrdenie k Leme 5.12 a potom dokážeme samotné tvrdenie (ii) tejto vety. $\square$

NA ZAMYSLENIE. Na precvičenie dokazovania sa skúste zamyslieť, ako by ste vyargumentovali, že

- každá slabo samodružná priamka osovej kolineácie prechádza stredom tejto kolineácie,
- každý slabo samodružný bod osovej kolineácie leží na osi tejto kolineácie.

Zhrňme si naše poznatky: nech κ je osová kolineácia. Potom

- κ má jedinú silne samodružnú priamku, ktorú voláme osou kolineácie,
- κ má presne jeden silne samodružný bod, ktorý voláme stredom kolineácie,
- všetky slabo samodružné priamky prechádzajú stredom kolineácie,
- všetky slabo samodružné body ležia na osi kolineácie.

NA ZAMYSLENIE. Zamyslite sa nad zobrazeniami roviny, ktoré už poznáte, uchopte ich ako kolineácie:

- osová súmernosť,
- osová afinita.
- otočenie,
- rovnolahlosť,
- posunutie.

Ktoré z nich sú osovémi/stredovými kolineáciami? Je niektoré z nich eláciou?

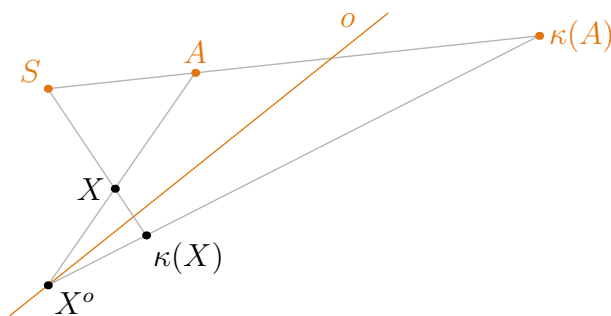
5.4.1. *Osová (stredová) kolineácia v praxi deskriptívnej geometrie.* V tejto časti bude kolineácia κ osovou (t.j. aj stredovou) kolineáciou, pričom jej stred je vlastný bod a tiež os bude vždy vlastnou priamkou. Pripomíname, že pod rovnobežnosťou priamok v rozšírenej (t.j. projektívnej) rovine rozumieme, že spoločný bod priamok je nevlastný bod.

Tvrdenie 5.14. Osová kolineácia κ je jednoznačne určená svojím stredom S , osou o a obrazom jedného bodu A , pričom body S , A a $\kappa(A)$ sú navzájom rôzne kolineárne body.

Dôkaz. Nech X je ľubovoľný bod neležiaci na priamke $\overleftrightarrow{AS}$. Ak X neleží na osi o (a teda nie je samodružný), je jeho obraz v kolineácii κ určený nasledovne:

- nech $X^o = o \cap \overleftrightarrow{XA}$ ($\overleftrightarrow{X^o\kappa(A)}$ je obrazom $\overleftrightarrow{XA}$),
- potom $\kappa(X) = \overleftrightarrow{X^o\kappa(A)} \cap \overleftrightarrow{SX}$.

Bod X^o alebo bod $\kappa(X)$ môže byť nevlastný.



Ak $X \in \overleftrightarrow{AS}$, zostrojíme si najprv obraz ľubovoľného nie pevného bodu neležiaceho na $\overleftrightarrow{AS}$ a pomocou neho obraz bodu A . $\square$

Tvrdenie 5.15. Nech κ je osová kolineácia. Potom úbežnice kolineácie κ sú rovnobežné s osou.

Dôkaz. Pre ľubovoľnú priamku p , ktorá nie je samodružnou, platí, že priesečník osi kolineácie a priamky p je pevný bod, teda je aj priesečníkom p a $\kappa(p)$.

Nevlastná priamka $\mathbb{E}_{\infty}^2$ má s osou spoločný nevlastný bod osi, preto aj jej obraz $\kappa(\mathbb{E}_{\infty}^2)$ bude mať s osou tento spoločný bod, t.j. priamka $\kappa(\mathbb{E}_{\infty}^2)$ je s osou rovnobežná.

To isté platí pre vzor nevlastnej priamky, lebo je zároveň obrazom nevlastnej priamky v kolineácii κ^{-1} . $\square$

Vidíme, že ak kolíneácia κ má silne samodružnú priamku, má nutne aj viacero ďalších vlastností, ktoré má aj kolíneácia, ktorú sme dostali priemetom stredového premietania roviny α na rovinu β : existuje aj stred kolíneácie a úbežnice kolíneácie sú rovnobežné s jej osou. Preto už asi nasledovné tvrdenie nie je veľmi prekvapivé:

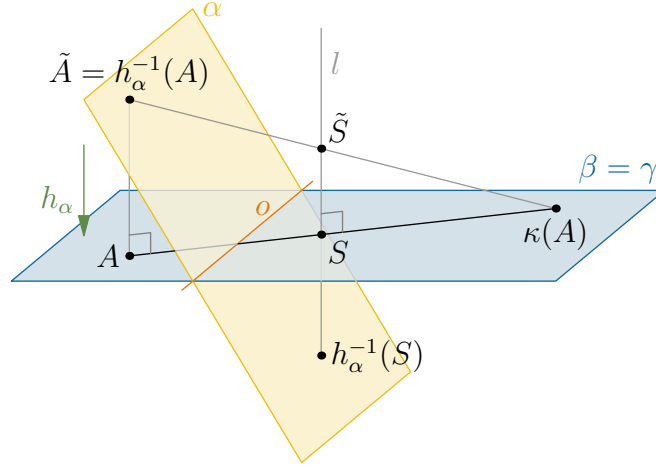
Tvrdenie 5.16. Každá osová kolíneácia, ktorej os aj stred sú vlastné, je kolmým priemetom nejakej stredovej kolíneácie medzi dvoma rovinami.

Dôkaz. Nech κ je skúmaná osová kolíneácia. Nech S je jej stred a o je jej os. Nech bod A sa zobrazí do bodu $\kappa(A)$. Štvorica $S, o, A, \kappa(A)$ kolíneáciu κ jednoznačne určuje.

Vnorme rovinu, ktorú κ transformuje, do trojrozmerného priestoru a označme ju (v súlade s označením použitým v časti 5.3.2 Priemet kolíneácie medzi rovinami) ako γ . Označenia určujúcich prvkov kolíneácie ponechajme bezo zmeny.

Ďalej nech β je rovina totožná s rovinou γ a nech α je rovina rôznobežná s β tak, aby priesečnicou $\alpha \cap \gamma$ bola os o . Zároveň nech α nie je kolmá na γ . Smer rovnobežného premietania nech je kolmý na rovinu γ .

Označme priemet bodu $A \in \gamma$ do roviny α (vo zvolenom smere, t.j. kolmo na γ) ako $\tilde{A}$. Nech l je priamka prechádzajúca bodom $S \in \gamma$ kolmá na γ . Keďže $A, \kappa(A), \tilde{A}$ aj S ležia v jednej rovine, ktorá je kolmá na γ , leží v tejto rovine aj priamka l , a teda je s priamkou $\tilde{A}\kappa(A)$ rôznobežná; označme ich priesečník ako $\tilde{S}$.



Nech k je stredové premietanie medzi rovinami $\alpha \rightarrow \beta$ so stredom $\tilde{S}$. Nech h je kolmé premietanie do roviny γ . Ako v časti 5.3.2 nech h_α resp. h_β je reštrikcia h na α resp. β a nech

$$\tilde{\kappa} = h_\beta \circ k \circ h_\alpha^{-1} = k \circ h_\alpha^{-1}.$$

Keďže κ je zložením kolínácií, je tiež kolíneáciou. Lahko sa presvedčíme, že

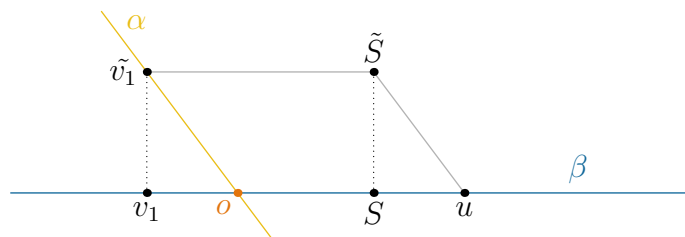
- o je priamkou samodružných bodov kolíneácie $\tilde{\kappa}$, lebo všetky body priamky o sú pevnými v zobrazení h_α aj v zobrazení k ;
- každá priamka roviny γ prechádzajúca bodom S je samodružnou v kolíneácii $\tilde{\kappa}$, lebo jej premietacia rovina v zobrazení h_α^{-1} splýva s premietacou rovinou priamky $h_\alpha^{-1}(l) \subset \alpha$ v zobrazení k ;
- $\tilde{\kappa}(A) = \kappa(A)$.

Teda $\tilde{\kappa} = \kappa$. □

Dôsledok 1. Nech S je stred a o os kolineácie. Nech v_1 je obraz nevlastnej priamky v tejto kolineácii a nech u je vzor nevlastnej priamky. Potom orientovaná vzdialenosť stredu S od úbežnice u sa rovná orientovanej vzdialenosti úbežnice v_1 od osi o .

Dôkaz. Rozložíme kolineáciu κ ako v dôkaze Tvrdenia: $\kappa = k \circ h_\alpha^{-1}$, kde h_α je kolmé premietanie $\alpha \rightarrow \gamma$ a k je premietanie $\alpha \rightarrow \beta = \gamma$ so stredom $\tilde{S}$. Označme ešte $\tilde{v}_1 = h_\alpha^{-1}(v_1)$.

Priemet všetkých týchto prvkov kolmo do roviny kolmej na os o je na obrázku.



Vidíme, že $ou\tilde{S}\tilde{v}_1$ je rovnobežník a v_1, S sú kolmé priemety $\tilde{v}_1$ a $\tilde{S}$ na priamku $\overleftrightarrow{ou}$. Odtiaľ vyplýva dokazovaná vlastnosť. $\square$

Dôsledok 2. Každá osová kolineácia zachováva dvojpomer štvorice bodov.

Dôkaz. Okrem Tvrdenia 5.16 viď aj Tvrdenie 5.9. $\square$

5.5. Zhrnutie. Štúdium kolineácií projektívnej roviny je veľmi zaujímavá a obsiahla oblasť geometrie. Zďaleka sme túto triedu transformácií nepokryli tak systematicky ako predchádzajúce. Urobíme si preto ešte zhrnutie, aby sme si ujasnili, čo vieme a čo zatiaľ možno iba tušíme. Venovať sa téme budete ešte zvlášť na predmete „Projektívna geometria“.

Vychádzame z definície, že kolineácia je zobrazenie, ktoré trojicu navzájom rôznych kolineárnych bodov zobrazí na trojicu navzájom rôznych kolineárnych bodov.

- Kolineácia rovny je bijektívne zobrazenie roviny do seba.
- Kolineácia zachováva dvojpomer štvorice bodov (pre osovú kolineáciu Dôsledok 2 Tvrdenia 5.16).
- Osová kolineácia je aj stredovou kolineáciou a naopak (Veta 5.13).
- Každá osová kolineácia κ je jednoznačne určená štvoricou $S, o, A, \kappa(A)$, kde $S, A, \kappa(A)$ sú tri navzájom rôzne kolineárne body (Dôsledok 1 Tvrdenia 5.16).
- Tiež naopak, pre každú štvoricu $S, o, A, \kappa(A)$, kde $S, A, \kappa(A) \notin o$ a $S, A, \kappa(A)$ sú tri navzájom rôzne kolineárne body, existuje príslušná kolineácia.