

Geometrické základy zobrazovacích metod

(pre študentov učiteľstva deskriptívnej geometrie)

KAG FMFI UK BRATISLAVA

Email address: `jana.chalmovianska@fmph.uniba.sk`

Obsah

Kapitola 1. Planimetria	5
1. Body a priamky v rovine	5
1.1. Incidencia bodov a priamok	5
1.2. Metrické záležitosti	5
2. Izometrie	6
3. Podobnosti	9
4. Určenosť bodu na priamke: deliaci pomer (signed ratio)	10
5. Určenosť bodu na priamke: afinné a barycentrické súradnice	13
6. Dvoj pomer (cross-ratio)	15
7. Konvexné množiny	16
Cvičenia	17
Kapitola 2. Stereometria	19
1. Incidencia, vzájomné polohy	19
1.1. Rovnobežnosť rovín a priamok	20
2. Metrické záležitosti	22
3. Princípy premietania	23
3.1. Rovnobežné premietanie	23
3.2. Stredové premietanie	24
Kapitola 3. Osová afinita	25
1. Afinita roviny	25
2. Osová afinita	27
2.1.	27
2.2. Osová afinita ako „záznam“ rovnobežného premietania	27
2.3. Dôležitosť osovej afinity	29
2.4. Osová afinita v praxi deskriptívnej geometrie	29
3. Elipsa ako afinný obraz kružnice	31
3.1. Obraz kružnice v kolmej osovej afinite	31
3.2. Obraz kružnice v afinite	32
3.3. Trojuholníková (zástavková) konštrukcia elipsy	36
3.4. Prúžková konštrukcia elipsy, rozdielová	37
3.5. Prúžková konštrukcia elipsy, súčtová	38
3.6. Rytzova konštrukcia	39
3.7. Oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy	40
Cvičenia	42
Kapitola 4. Osová kolineácia	43
1. Rozšírený euklidovský priestor	43
2. Stredové premietanie v priestore	45
2.1. Obraz priamky v stredovom premietaní	45

2.2. Obraz roviny v stredovom premietaní	46
3. Kolineácia medzi rovinami	47
3.1.	47
3.2. Priemet kolineácie medzi rovinami	48
4. Kolineácie v rovine	50
4.1. Osová (stredová) kolineácia v praxi deskriptívnej geometrie	52
5. Zhrnutie	54
Cvičenia	54
Kapitola 5. Kuželosečky	55
1. Elipsa ako afinný obraz kružnice	55
1.1. Kružnica	55
1.2. Elipsa	55
1.3. QD veta pre valcovú plochu: metrická definícia elipsy	56
2. Kuželosečky sú rezmi kuželovej plochy (QD-vety)	59
2.1. Elipsa ako rez kuželovej plochy	59
2.2. Metrická definícia hyperboly	60
2.3. Hyperbola ako rez kuželovej plochy	63
2.4. Metrická definícia paraboly	63
2.5. Parabola ako rez kuželovej plochy	64
3. Ešte niečo málo k terminológii kuželosečiek	66
4. Elipsa	67
4.1. Dotyčnice elipsy	67
4.2. Elipsa ako obraz kružnice v kolineácii	67
5. Parabola	69
5.1. Dotyčnice paraboly	69
5.2. Parabola ako obraz kružnice v kolineácii	71
5.3. Vizualizácia paraboly	72
6. Hyperbola	75
6.1. Dotyčnice hyperboly	75
6.2. Hyperbola ako obraz kružnice v kolineácii	78
6.3. Vizualizácia hyperboly	81
7. Dodatok: konfokálne kuželosečky	83

KAPITOLA 1

Planimetria

1. Body a priamky v rovine

Priestorom, v ktorom pracujeme, je reálna euklidovská rovina $\mathbb{E}^2$.

1.1. Incidencia bodov a priamok. V rovine uvažujeme tieto základné objekty:

- body budeme označovať veľkými písmenami latinskej abecedy: $A, B, C, P, Q, \dots$,
- priamky budeme označovať malými písmenami latinskej abecedy: $p, q, a, b, \dots$.

Incidencia je základná relácia bodov a priamok (a neskôr zahrnie aj roviny). Je súhrnným pojmom pre relácie „byť podmnožinou“, „patríť“, „obsahovať“, „prechádzať cez“, ... ($\subset, \in, \supset, \ni$). Napríklad „bod je incidentný s priamkou“ znamená, že bod leží na priamke, priamka prechádza bodom. Dve priamky sú incidentné, ak sú totožné.

Body incidentné s jednou priamkou (t.j. ležiace na jednej priamke) nazývame **kolineárnymi**.

Dve priamky v $\mathbb{E}^2$ nazveme **rovnobežnými** (píšeme $p \parallel q$), ak sú totožné alebo sú disjunktné. Priamky, ktoré majú spoločný jeden bod, nazývame **rôznobežnými** a spoločný bod nazývame ich **priesečníkom**.

Priamka je jednoznačne určená dvoma svojimi bodmi. Tiež môže byť určená jedným svojím bodom a smerom (napríklad, že je rovnobežná s nejakou inou danou priamkou).

Zväzok priamok je množina všetkých priamok, ktoré prechádzajú jedným bodom, tzv. **stredom zväzku**.

Osnova priamok je množina všetkých navzájom rovnobežných priamok.

V ďalšom budeme predpokladať aj znalosť pojmov **úsečka**, **os úsečky**, **orientovaná úsečka**, **vzdialenosť dvoch bodov** / **dĺžka úsečky**, **polpriamka**, **polrovina** a **vektor** tak, ako ste sa s nimi už stretli na strednej škole.

1.2. Metrické záležitosti. Dva uhly sú **susedné**, ak jedno rameno majú spoločné a ich druhé ramená tvoria spolu priamku. Uhol nazveme **pravým**, ak je zhodný so svojím susedným uhlom. Dve priamky sú na seba **kolmé**, aj zvierajú pravý uhol.

TVRDENIE-DEFINÍCIA 1.1. *Pre každú priamku a bod existuje práve jedna kolmica na danú priamku prechádzajúca daným bodom. Priesečník priamky a kolmice je **päta kolmice** alebo tiež **kolmý priemet bodu na priamku**.*

Dôkaz. Existencia: to, že kolmica existuje, ukážeme tak, že popíšeme jej konštrukciu (cvičenie).

Jednoznačnosť: ak by existovali dve kolmice z daného bodu na danú priamku, vznikol by tak trojuholník s dvoma pravými uhlami, čo je spor. $\square$

Vzdialenosť bodu od priamky je vzdialenosť tohto bodu od jeho kolmého priemetu na túto priamku.

TVRDENIE 1.2. *Vzdialenosť bodu od jeho kolmého priemetu na priamku je najkratšou spomedzi vzdialeností medzi daným bodom a ľubovoľným bodom priamky.*

Dôkaz. Nech M je uvažovaný bod, nech $M^\perp$ je jeho kolmý priemet na priamku. Ak X je ľubovoľný iný bod na priamke, potom $\triangle MM^\perp X$ je pravouhlý s preponou MX , ktorá je preto kratšia ako odvesna $MM^\perp$. $\square$

O rovnobežných priamkach hovoríme, že zvierajú nulový uhol. Kolmé priamky zvierajú pravý uhol. Vo všeobecnom prípade rôznobežné priamky určia štyri uhly so spoločným vrcholom v priesečníku. Tieto uhly sú po dvoch vrcholové a teda zhodné. **Uhol dvoch rôznobežiek**, ktoré nie sú na seba kolmé, je menší z dvoch rôznych uhlov určených týmito priamkami.

2. Izometrie

Budeme sa teraz chvíľu zaoberať dôležitými triedami zobrazení euklidovskej roviny. Zobrazenie, aké budeme študovať, každému bodu roviny $\mathbb{E}^2$ priradí nejaký iný bod tejto roviny. Množina obrazov je teda tá istá ako množina vzorov a v takom prípade hovoríme o **transformáciách euklidovskej roviny**.

Pevný (samodružný, invariantný) bod transformácie f je taký bod A , pre ktorý platí $f(A) = A$. **Pevnou (samodružnou, invariantnou)** priamkou transformácie f je priamka p , pre ktorý platí $f(p) \subset p$. Pokiaľ je p taká samodružná priamka, že každý jej bod je samodružný, potom ju nazývame aj **silne samodružnou**.

Zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je **izometria (zhodnosť, zhodné zobrazenie)**, ak zachováva vzdialenosti bodov, t.j. ak

$$\forall P, Q \in \mathbb{E}^2 \quad |f(P)f(Q)| = |PQ|.$$

Nech $S \in \mathbb{E}^2$ je pevne zvolený bod. **Stredová súmernosť** so stredom S je transformácia $\mathbb{E}^2$, ktorá každý bod A zobrazí do takého bodu A' , že S je stred úsečky AA' .

Nech $o \subset \mathbb{E}^2$ je pevne zvolená priamka. **Osová súmernosť** podľa osi o je transformácia $\mathbb{E}^2$, ktorá každý bod A zobrazí do takého bodu A' , že o je os úsečky AA' .

Posunutie (translácia) je taká transformácia $\mathbb{E}^2$, že pre každú dvojicu bodov A, B a ich obrazy A', B' platí, že stred úsečky AB' a stred úsečky $A'B$ sú totožné. Alternatívne môžeme posunutie popísať ako transformáciu, pre ktorú sú pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{E}^2$ body A, A', B, B' buď kolineárne alebo tvoria rovnobežník $AA'B'B$.

Nech $S \in \mathbb{E}^2$ je pevne zvolený bod a nech φ je orientovaná veľkosť uhla (vysvetliť trochu???). **Otočenie (rotácia)** okolo stredu S o uhol φ je transformácia $\mathbb{E}^2$, ktorá každý bod A zobrazí do takého bodu A' , že $|SA'| = |SA|$ a $\angle ASA' = \varphi$.

TVRDENIE 1.3. *Stredová súmernosť, osová súmernosť, posunutie aj otočenie sú izometriami euklidovskej roviny.*

Dôkaz. Cvičí sa s vetami o zhodnosti trojuholníkov. doplniť??? stačí osoú súmernosť, ostatné je analogické $\square$

NA ZAMYSLENIE. Aké samodružné body a samodružné priamky majú spomenuté izometrie?

Izometria je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov: nech A, B, C sú nekolineárne, teda tvoria vrcholy trojuholníka, a nech o zhodnosti f vieme, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$. Každý ďalší bod $P \in \mathbb{E}^2$ je jednoznačne určený svojimi vzdialenosťami od A, B a C . Potom P sa izometriou f nutne zobrazí do jednoznačne určeného bodu P' , pre ktorý

$$|P'A'| = |PA|, \quad |P'B'| = |PB| \quad \text{a} \quad |P'C'| = |PC|.$$

Zložením izometrií je zase izometria. Ku každej izometrii f vieme nájsť **inverzné zobrazenie**, t.j. také zobrazenie f^{-1} , že $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ je identita. Inverzné zobrazenie k izometrii je tiež izometriou: aj $f(A) = A'$, teda $f^{-1}(A') = A$, podobne pre B , potom

$$|f^{-1}(A')f^{-1}(B')| = |(f^{-1}(f(A))f^{-1}(f(B)))| = |AB| = |f(A)f(B)| = |A'B'|.$$

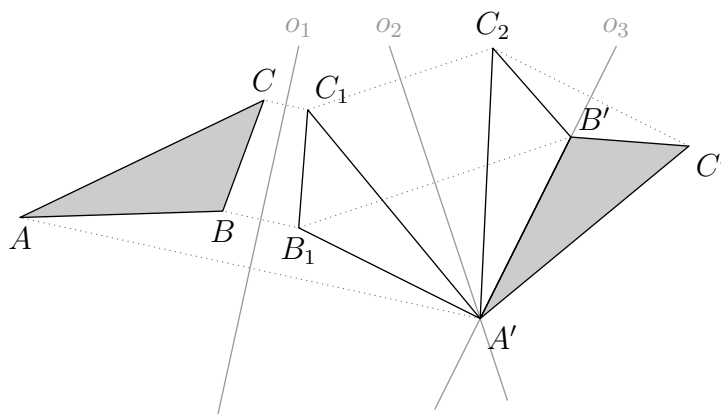
NA ZAMYSLENIE. Čo sú inverzné zobrazenia k jednotlivým spomenutým izometriám (stredová súmernosť, posunutie, ...)?

VERA 1.4. *Pre ľubovoľné trojuholníky v euklidovskej rovine platí: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ práve vtedy, keď existuje izometria f roviny taká, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$.*

Dôkaz. Ak f je zhodnosť a $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$, potom $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú zhodné podľa vety sss o zhodnosti trojuholníkov.

Nech teraz naopak sú tieto trojuholníky zhodné. Nájdeme nanaajvyš tri osové súmernosti f_1, f_2, f_3 také, že pre ich zloženie bude platiť

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(A) = A', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(B) = B', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(C) = C'.$$



Ak $A' = A$, tak f_1 nech je identita. Ak $A' \neq A$, potom nech o_1 je os úsečky AA' . Nech f_1 je osová súmernosť podľa osi o_1 . Zrejme f_1 bod A zobrazí na bod $f(A)$. Označme $B_1 = f_1(B)$ a $C_1 = f_1(C)$. Keďže osová súmernosť je zhodnosť, tak platí

$$|A'B'| = |AB| = |A'B_1|.$$

Ak $B' = B_1$, potom zas nech f_2 je identita. Ak $B' \neq B_1$, potom nech o_2 je os úsečky B_1B' a nech f_2 je osová súmernosť podľa osi o_2 , teda $f_2(B_1) = B'$. Keďže $|A'B'| = |A'B_1|$,

tak $A' \in o_2$. Preto $f_2(A') = A'$. Pre bod C označíme $f_2(C_1) = C_2$. Pre vzdialenosti bodov máme

$$\begin{aligned} |A'C'| &= |AC| = |A'C_1| = |A'C_2| \\ |B'C'| &= |BC| = |B_1C_1| = |B'C_2|, \end{aligned}$$

kde v oboch riadkoch prvá rovnosť vyplýva z predpokladu, druhá z toho, že f_1 je zhodnosť a tretia z toho, že f_2 je zhodnosť.

Nakoniec, ak $C' \neq C_2$, potom nech o_3 je os úsečky C_2C' . Z práve ukázaných rovností máme, že $A', B' \in o_3$, teda sú to pevné body súmernosti f_3 podľa osi o_3 . Navyše $f_3(C_2) = C'$. (Znovu v prípade, že $C' = C_2$, zvolíme za f_3 identitu.)

Našli sme tak súmernosti f_i také, že

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(A) = A', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(B) = B', \quad f_3 \circ f_2 \circ f_1(C) = C',$$

čím sme tvrdenie dokázali. $\square$

Dôkaz predchádzajúcej vety je veľmi silný, dokázal viac, než tvrdila samotná veta. Videli sme v ňom, že každú zhodnosť vieme napísať ako zloženie nanajvýš troch osových súmerností. Táto vedomosť nám dáva do rúk nástroj na klasifikáciu všetkých izometrií roviny.

Zistíme teda aké izometrie euklidovskej roviny existujú. Postupne budeme preverovať, čo dostaneme zložením 0,1,2 a 3 osových súmerností. Osi súmerností budeme označovať o_i , príslušné súmernosti f_i .

- (0) V tejto triede je jediná izometria – identita.
- (1) Trieda pozostáva zo samotných osových súmerností.
- (2) Pri skladaní dvoch osových súmerností vyšetrujeme jednotlivé prípady podľa vzájomnej polohy týchto osí:
 - $o_1 = o_2$, vtedy $f_1 = f_2$ a $f_2 \circ f_1$ je identita.
 - o_1 a o_2 sú rovnobežné rôzne. Lahko nahliadneme, že $f_2 \circ f_1$ je posunutie v smere kolmom na osi o dvojnásobok ich vzdialenosti. Dôležitým pozorovaním je, že to isté posunutie dostaneme aj zložením iných súmerností, ktorých osi budú ľubovoľným (spoločným) posunutím osí o_1 a o_2 .
 - o_1 a o_2 sú rôznobežné. Znovu ľahko vyargumentujeme, že v tomto prípade je $f_2 \circ f_1$ otočenie so stredom v priesečníku osí a uhol otočenia je dvojnásobkom jedného z uhlov určených osami. Podobne ako pri predchádzajúcom prípade, aj tu môžeme obe osi spoločne ľubovoľne otočiť okolo ich priesečníka a výsledným zložením nových osových súmerností bude to isté otočenie.
- (3) Pri skladaní troch súmerností máme dva na seba podobné špeciálne prípady:
 - o_1, o_2 a o_3 patria jednej osnove. Vtedy $f_2 \circ f_1$ je posunutie. To isté posunutie dostaneme aj ak obe osi posunieme tak, aby druhá os splynula s tretou, a tak druhá súmernosť bude mať tú istú os ako tretia: $f'_2 = f_3$. Vtedy

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = f_3 \circ (f'_2 \circ f'_1) = (f_3 \circ f'_2) \circ f'_1 = f'_1,$$

výsledným zložením je teda osová súmernosť.

- o_1, o_2 a o_3 patria tomu istému zväzku. Tentokrát je $f_2 \circ f_1$ otočenie a toto znovu zapíšeme ako zloženie iných dvoch osových súmerností, znovu

tak, aby druhá os splynula s tretou. Znovu dostávame jednoduchú osoú súmernosť.

- Nakoniec nech nenastáva ani jeden z predchádzajúcich prípadov, máme tak novú, doteraz nepopísanú izometriu. Aby sme nahliadli lepšie jej geometrii, nahradíme pôvodné osové súmernosti inými, ktoré po zložení dajú tú istú transformáciu. Najprv nahradíme prvé dve osi otočením okolo ich priesečníka novými osami o'_1, o'_2 tak, aby $o'_2 \perp o_3$. Potom druhé dve (navzájom kolmé) osi otočením okolo ich priesečníka nahradíme osami o''_2, o'_3 tak, aby $o''_2 \parallel o'_1$. (V prípade, keby o_1 a o_2 boli rovnobežné, začneme „točiť“ najprv druhú a tretiu os, potom prvú a druhú.) Vidíme, že ide o zloženie osovej súmernosti a posunutia pozdĺž osi tejto súmernosti. Túto izometriu nazývame **posunutá súmernosť**.

NA ZAMYSLENIE. Aké pevné body a samodružné priamky má posunutá súmernosť?

NA ZAMYSLENIE. V predchádzajúcom zamyslení ste sa vlastne presvedčili, že os, ktorá sa vynorila v rozklade posunutej súmernosti na osoú súmernosť a s osou rovnobežné posunutie, je jednoznačná, voláme ju **os posunutej súmernosti**. Ako by ste čo najjednoduchšie našli os posunutej súmernosti danej napríklad obrazom trojuholníka?

3. Podobnosti

Zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je **podobnosť** (**podobné zobrazenie**), ak zachováva pomery vzdialenosti bodov, presnejšie ak existuje $k \in \mathbb{R}^+$ (konštanta pre celú podobnosť) také, že

$$\forall P, Q \in \mathbb{E}^2 \quad |f(P)f(Q)| = k|PQ|.$$

Číslo k nazývame **koeficientom podobnosti** f .

Zjavne ak $k = 1$, podobnosť je izometriou.

PRÍKLAD. Majme v rovine afinnú súradnicovú sústavu. Nech transformácia f bod so súradnicami (a_1, a_2) zobrazí do bodu $(3a_1, 3a_2)$. Ide o podobnosť s koeficientom 3.

Zobrazenie z príkladu je prípadom špeciálnej triedy podobností. **Rovnoľahlosť** (**homotétia**, z angl. „homothety“) v rovine $\mathbb{E}^2$ určená **stredom** $S \in \mathbb{E}^2$ a **koeficientom** $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ zobrazuje bod A na taký bod $A' \in \overleftrightarrow{AS}$, že

- pre $k > 0$ leží A' na polpriamke $\overrightarrow{SA}$, a pre $k < 0$ leží na opačnej polpriamke,
- $|SA'| = |k||SA|$.

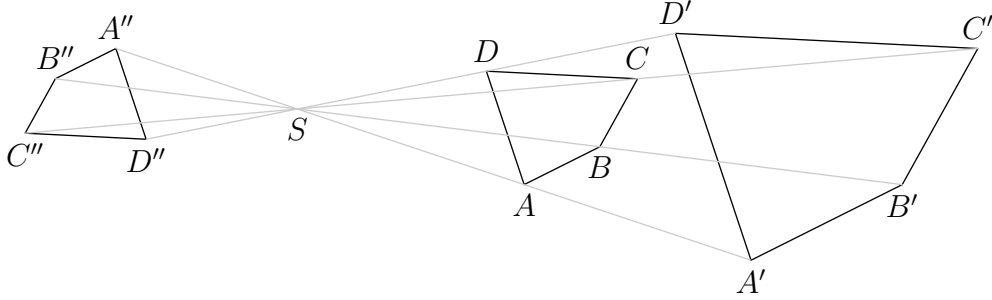
V príklade hore ide o rovnoľahlosť so stredom v začiatku súradníc a s koeficientom 3.

TVRDENIE 1.5. *Rovnoľahlosť s koeficientom k je podobnosťou s koeficientom $|k|$.*

Dôkaz. Argumentuje sa pomocou podobnosti trojuholníkov. rozviesť podrobnejšie??? $\square$

Rovnoľahlosť s koeficientom -1 je stredová súmernosť. Inverzným zobrazením k rovnoľahlosti s koeficientom k je tiež rovnoľahlosť s tým istým stredom a s koeficientom $1/k$.

VETA 1.6. *Každá podobnosť sa dá napísať ako zloženie rovnoľahlosti a izometrie.*



$A'B'C'D'$ je obrazom $ABCD$ v rovnoláhlosti so stredom S a koeficientom 2,
 $A''B''C''D''$ je obrazom $ABCD$ v rovnoláhlosti so stredom S a koeficientom $-0,8$.

Dôkaz. Nech f je podobnosť s koeficientom k . Zvoľme si ľubovoľnú rovnoláhlosť g s tým istým koeficientom k . Potom $g^{-1} \circ f$ je zhodnosť, označme ju h . Podobnosť f sme rozložili:

$$f = g \circ h.$$

□

DÔSLEDOK. *Trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú podobné práve vtedy, keď existuje podobnosť f roviny taká, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$.*

POZNÁMKA. Tento dôsledok resp. Veta 1.4 o zhodnosti sa v modernej geometrii vyslovujú ako definície podobnosti resp. zhodnosti trojuholníkov. Výhodou takého prístupu je, že takto môžeme jednotne a jednoducho zdefinovať podobnosť či zhodnosť ľubovoľných útvarov, nielen trojuholníkov.

4. Určenosť bodu na priamke: deliaci pomer (signed ratio)

Nech A, B, C sú tri navzájom rôzne kolíneárne body. **Deliaci pomer** usporiadanej trojice bodov A, B, C (alebo bodu C vzhľadom na body A, B), ozn. (ABC) , je také reálne číslo, že

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|},$$

pričom

- $(ABC) < 0$, ak C je vnútorným bodom úsečky AB ,
- $(ABC) > 0$, ak C leží zvonka AB .

Pomocou deliaceho pomeru určujeme polohu bodu C na $\overleftrightarrow{AB}$ vzhľadom na body A a B .

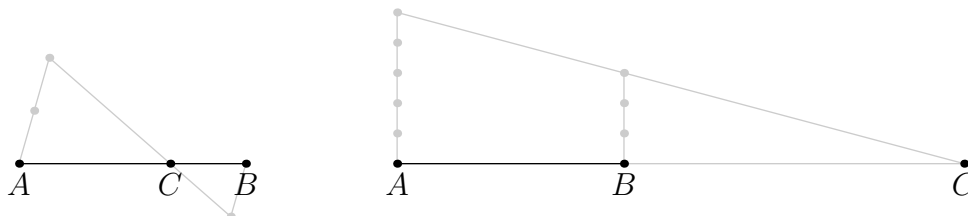
Budeme používať aj symbolický zápis

$$(ABC) = \frac{AC}{BC},$$

v ktorom čitateľ aj menovateľ chápeme ako **orientované dĺžky** orientovaných úsečiek. To znamená, že najprv si zvolíme **orientáciu priamky**, na ktorej ležia body A, B, C (napr. „sprava doľava“). Orientovaná úsečka má potom kladnú dĺžku, ak jej orientácia sa zhoduje s orientáciou priamky, v opačnom prípade má zápornú dĺžku. Pre deliaci pomer to znamená, že

- $(ABC) > 0$, ak AC a BC sú rovnako orientované (obe „ukazujú na tú istú stranu“),
- $(ABC) < 0$, ak AC a BC sú opačne orientované.

Štandardne sa budete stretávať s deliacim pomerom, ktorý je racionálne číslo. Je



vľavo: $(ABC) = -2$, vpravo: $(ABC) = 5/3$.

to výhodné pri kreslení obrázkov (či už črtaní alebo rysovaní): na rovnobežné priamky, ktorým je $\overleftrightarrow{AB}$ transversálou, nanášame k bodu A dieliky, ktorých počet je daný číslom (ABC) , a k bodu B počet daný menovateľom. Ak $(ABC) > 0$, nanášame do tej istej strany, inak do opačných strán od $\overleftrightarrow{AB}$.

Zdôrazniť jednoznačnosť medzi bodmi a deliacimi pomermi???

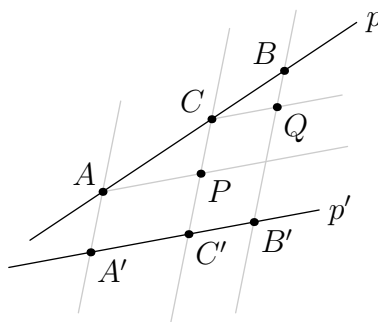
NA ZAMYSLENIE. Nie každému reálnemu číslu zodpovedá nejaký bod $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $C \neq A, B$. Ktoré reálne hodnoty (ABC) nenadobudne?

Vedeli by ste dodefinovať deliaci pomer ešte pre nejaký bod na $\overleftrightarrow{AB}$?

TVRDENIE 1.7. *Majme dve trojice navzájom rôznych kolineárnych bodov A, B, C a A', B', C' , pričom $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{A'B'}$.*

- Ak $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria jednej osnove, potom $(ABC) = (A'B'C')$.
- Ak $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria jednému zväzku a $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, potom $(ABC) = (A'B'C')$.

Dôkaz. (i)

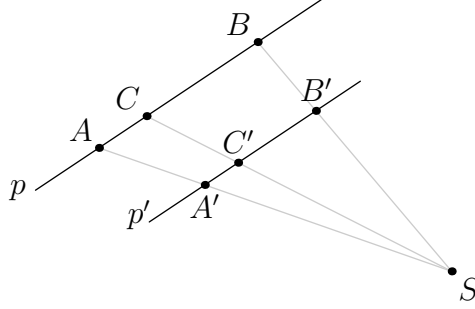


Vedme bodmi A a C rovnobežky k $\overleftrightarrow{A'B'}$ a zostrojme body P, Q ako na obrázku. Trojuholníky $\triangle APC$ a $\triangle CQB$ sú podobné, teda

$$|AP| : |CQ| = |AC| : |CB|.$$

Navyše z rovnobežnosti máme, že $|AP| = |A'C'|$ a $|CQ| = |C'B'|$.

(ii)



Nech S je stred uvažovaného zväzku. Platí

$$|AC| : |A'C'| = |CS| : |C'S| = |CB| : |C'B'|,$$

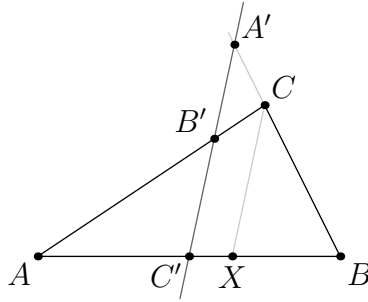
kde prvá rovnosť vyplýva z podobnosti $\triangle ACS$ a $\triangle A'C'S$, druhá z podobnosti $\triangle CBS$ a $\triangle C'B'S$. $\square$

VETA 1.8 (Menelaova veta). *Majme $\triangle ABC$ a body $A' \in \overleftrightarrow{BC}$, $B' \in \overleftrightarrow{AC}$, $C' \in AB$ rôzne od vrcholov A, B, C . Potom body A', B', C' sú kolineárne práve vtedy, keď*

$$(1) \quad (ABC')(BCA')(CAB') = 1.$$

Dôkaz. Ak sú body A', B', C' kolineárne, tak priamka nimi určená pretne buď dve strany $\triangle ABC$ alebo žiadnu. Počet záporných činiteľov na ľavej strane rovnosti (1) je tak párny, preto v súčine máme kladné číslo. Stačí nám tak zamerať sa už len na dĺžky jednotlivých úsečiek.

Predpokladajme, že $\overleftrightarrow{A'B'}$ trojuholník pretne a bez ujmy na všeobecnosti nech pretína strany AB a AC .



Nech X je taký bod na AB , že $\overleftrightarrow{CX} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$. Z konštrukcie bodu X a následnej podobnosti trojuholníkov máme

$$\frac{|AC'|}{|AB'|} = \frac{|XC'|}{|CB'|} \quad \text{a} \quad \frac{|XC'|}{|CA'|} = \frac{|BC'|}{|BA'|}.$$

Tieto rovnosti teraz využijeme pri výpočte:

$$(ABC')(BCA')(CAB') = \frac{|AC'|}{|BC'|} \frac{|BA'|}{|CA'|} \frac{|CB'|}{|AB'|} = \frac{|XC'|}{|CB'|} \frac{|BA'|}{|BC'|} \frac{|CB'|}{|CA'|} = \frac{|XC'|}{|BC'|} \frac{|BA'|}{|CA'|} = 1.$$

Prípad, keď $\overleftrightarrow{A'B'}$ trojuholník nepretína, sa dokazuje podobne, s využitím podobnosti trojuholníkov.

Keďže deliaci pomer (ABC') je jednoznačne určený polohou bodu C na $\overleftrightarrow{AB}$ a naopak, dokázali sme nielen implikáciu, ale celú ekvivalenciu: ak by sa stalo, že

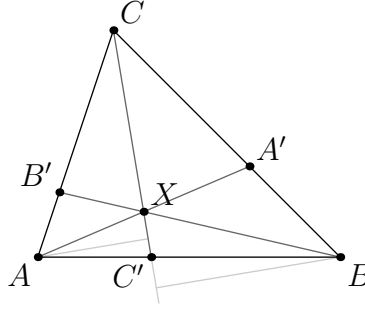
$$(ABC')(BCA')(CAB') = 1,$$

ale $A' \notin \overleftrightarrow{B'C'}$, potom z práve dokázaného by pre bod $A'' = \overleftrightarrow{B'C'} \cap \overleftrightarrow{BC} \neq A'$ platilo, že $(BCA') = (BCA'')$, čo je spor. $\square$

VETA 1.9 (Cevova veta). *Majme $\triangle ABC$ a body $A' \in \overleftrightarrow{BC}$, $B' \in \overleftrightarrow{AC}$, $C' \in \overleftrightarrow{AB}$ rôzne od vrcholov A, B, C . Potom $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria tomu istému zväzku práve vtedy, keď*

$$(ABC')(BCA')(CAB') = -1.$$

Dôkaz. Predpokladajme, že $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ patria jednému zväzku. Nech stred tohto zväzku, bod X , leží vnútri $\triangle ABC$. Potom zrejme $(ABC')(BCA')(CAB')$ je záporné číslo a potrebujeme tak sledovať už len dĺžky jednotlivých úsečiek.



Trojuholníky $\triangle AXC$ a $\triangle CXB$ majú spoločnú stranu XC , pomer ich obsahov je tak rovný pomeru ich výšok na túto stranu, a ten je s podobnosťou trojuholníkov (viď obrázky) rovnaký ako pomer dĺžok úsečiek AC' a BC' . Podobne to platí pre ďalšie dvojice trojuholníkov. Môžeme tak priamo počítať (obsah $\triangle PQR$ označujeme ako $\mathcal{S}_{PQR}$):

$$|(ABC')(BCA')(CAB')| = \frac{|AC'|}{|BC'|} \frac{|BA'|}{|CA'|} \frac{|CB'|}{|AB'|} = \frac{\mathcal{S}_{AXC}}{\mathcal{S}_{CXB}} \frac{\mathcal{S}_{BXA}}{\mathcal{S}_{AXC}} \frac{\mathcal{S}_{CXB}}{\mathcal{S}_{BXA}} = 1.$$

Podobne (pomocou obsahov trojuholníkov) sa dokázu aj prípady, keď sa stred zväzku nachádza mimo $\triangle ABC$.

A ako pri dôkaze Menealovej vety sme vlastne dokázali ekvivalenciu. $\square$

5. Určenosť bodu na priamke: afinné a barycentrické súradnice

Nech A, B sú rôzne body. Polohu bodu C na $\overleftrightarrow{AB}$ môžeme určiť aj nasledovne: priamku AB budeme chápať ako číselnú os, kde bod A zodpovedá číslu 0 a bod B číslu 1. **Afinná súradnica bodu C** je jeho číselná hodnota na tejto osi.

Exaktnejšie: afinná súradnicová sústava je určená bodom O (začiatok súradnicovej sústavy) a nenulovým vektorom $\mathbf{e}$ (jednotkový vektor). Bod P má potom súradnicu (p) , ak

$$P = O + p\mathbf{e}.$$

V situácii hore je bod A začiatkom súradnicovej sústavy a bod B reprezentuje polohu začiatku po posunutí o jednotkový vektor, t.j. B má súradnicu (1) . Zvolená súradnicová

sústava zjavne určuje jedno-jednoznačnú korešpodenciu medzi bodmi $\overleftrightarrow{AB}$ a reálnymi číslami.

Majme znovu rôzne body A, B . Polohu bodu C vzhľadom na A a B môžeme teda určiť

- pomocou deliaceho pomeru: $\lambda = (ABC)$,
- pomocou afinných súradníc vzhľadom na súradnicovú sústavu $A, \mathbf{e}$ (kde $B = A + \mathbf{e}$): $C = A + c\mathbf{e}$.

Medzi týmito súradnicami je vzťah

$$c = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \lambda = \frac{c}{c - 1}.$$

dôkaz ako cvičenie???

Aby sme sa vyhli pomerne abstraktnému pojmu vektora, používajú sa v geometrii (špeciálne v geometrickom modelovaní) aj tzv. barycentrické súradnice. Oprieme sa o pozorovanie, že ak má vektor $\mathbf{v}$ začiatok v bode P a koniec v bode Q , tak súradnice tohto vektora zodpovedajú rozdielu súradníc týchto bodov:

$$\mathbf{v} = Q - P.$$

Ak teda bod C v afinnej súradnicovej sústave určenej začiatkom A a jednotkovým vektorom $\mathbf{e} = B - A$ má afinnú súradnicu (c) , môžeme písať

$$C = A + c\mathbf{e} = A + c(B - A) = (1 - c)A + cB.$$

Dvojicu $1 - c, c$ nazývame **barycentrické súradnice** bodu C vzhľadom na **barycentrickú súradnicovú sústavu** A, B .

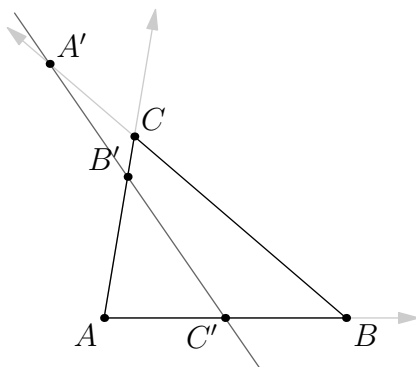
Súčet barycentrických súradníc bodu je *vždy* 1.

PRÍKLAD. Dokážeme si Menelaovu vetu (Veta 1.8) pomocou afinných súradníc.

Majme konfiguráciu bodov ako v tvrdení Vety. Označme

$$(ABC') = \gamma, \quad (BCA') = \alpha, \quad (CAB') = \beta.$$

Prepíšeme si situáciu z Menelaovej vety do afinných súradníc.



Zvoľme si súradnice na $\overleftrightarrow{AB}$ tak, aby A bol začiatok a B jednotkový bod, táto priamka bude prvou súradnicovou osou v rovine. Podobne si zvoľme súradnice na $\overleftrightarrow{AC}$, kde znovu nech A je začiatok a C jednotkový bod:

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, 1).$$

Týmto sme zaviedli afinné súradnice v celej rovine.

Keďže $(ABC') = \gamma$, afinné súradnice bodu C' sú

$$C' = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}, 0 \right).$$

Pre bod B' platí, že $(CAB') = \beta$, čiže $(ACB') = 1/\beta$, odkiaľ vypočítame afinné súradnice

$$B' = \left(0, \frac{1}{1 - \beta} \right).$$

Nakoniec ešte vypočítame afinné súradnice bodu A' . Z $(BCA') = \alpha$ máme

$$\begin{aligned} A' &= B + \frac{\alpha}{\alpha - 1}(C - B) = \frac{-1}{\alpha - 1}B + \frac{\alpha}{\alpha - 1}C \\ A' &= \left(\frac{-1}{\alpha - 1}, \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right). \end{aligned}$$

Chceme teraz konečne zistiť, či sú A' , B' a C' kolieárne. Môžeme to previesť napríklad tak, že si napíšeme rovnicu $\overleftrightarrow{B'C'}$ v úsekovom tvare a budeme sledovať, či $A' \in \overleftrightarrow{B'C'}$:

$$\overleftrightarrow{B'C'} : \frac{\gamma - 1}{\gamma}x + (1 - \beta)y = 1$$

a dosadením súradníc bodu A' naozaj zistíme, že $A' \in \overleftrightarrow{B'C'}$ práve vtedy, keď $\alpha\beta\gamma = 1$.

6. Dvoj pomer (cross-ratio)

Nech A, B, C, D sú štyri navzájom rôzne kolieárne body. **Dvoj pomer** usporiadanej štvorice bodov A, B, C, D je reálne číslo

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Podobne ako deliaci pomer, aj dvoj pomer sa zvykne zapisovať pomocou orientovaných dĺžok orientovaných úsečiek:

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

TVRDENIE 1.10. *Majme dve štvorice navzájom rôznych kolieárnych bodov A, B, C, D a A', B', C', D' , pričom $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{A'B'}$. Ak priamky $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ a $\overleftrightarrow{DD'}$ patria jednému zväzku, potom $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

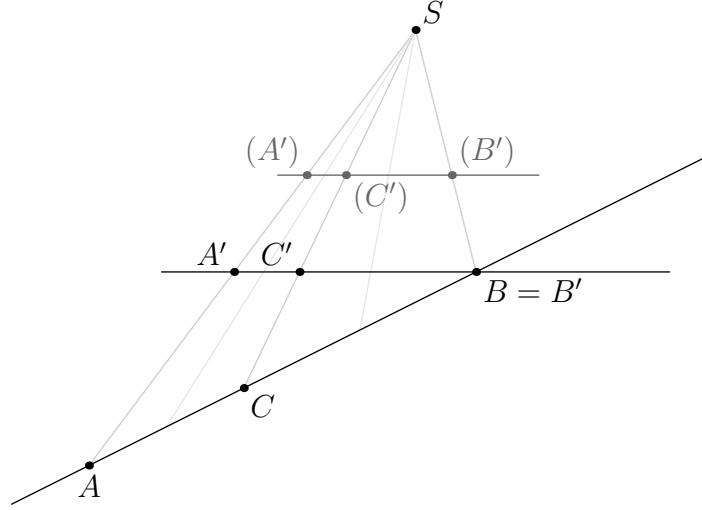
Dôkaz. Ak $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, potom podľa Tvrdenia 1.7(ii) platí

$$(ABC) = (A'B'C') \quad \text{a} \quad (ABD) = (A'B'D')$$

a keďže dvoj pomer je podielom deliacich pomerov, tak aj $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Nech $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ a $\overleftrightarrow{DD'}$ patria jednému zväzku, označme jeho stred S .

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{A'B'}$ sa pretínajú v bode $B = B'$: ak by to tak nebolo, premietneme body A', B', C' a D' zo stredu S na vhodnú rovnobežnú priamku (viď obrázok), čím sa podľa Tvrdenia 1.7(ii) deliace pomery nezmenia.



Deliaci pomer $(A'S)$ označme ako λ . Všimnime si teraz $\triangle A'AB$ a priamku CS . Keďže C, C', S sú kolineárne, podľa Menelaovej vety máme

$$(ABC)(B'A'C')(A'S) = 1$$

$$(ABC) = \frac{1}{\lambda(B'A'C')} = \frac{(A'B'C')}{\lambda}$$

Ten istý vzťah dostaneme, keď bod C nahradíme bodom D :

$$(ABD) = \frac{(A'B'D')}{\lambda},$$

a tak pre dvojpomery skúmaných štvoríc bodov dostávame

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\lambda(A'B'C')}{\lambda(A'B'D')} = (A'B'C'D').$$

□

7. Konvexné množiny

Množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{E}^2$ sa nazýva **konvexná**, ak s každými svojimi dvoma bodmi obsahuje aj celú úsečku nimi určenú.

PRÍKLAD. Konvexnými množinami sú napríklad: bod, úsečka, priamka, polrovina, trojuholník (hranica s vnútrom), vnútro trojuholníka bez hranice, ...

Konvexnými množinami nie sú: hranica trojuholníka, n -tica bodov pre $n \geq 2$, ...

Nech $\mathcal{N} \subset \mathbb{E}^2$ je ľubovoľná množina. **Konvexný obal** množiny $\mathcal{N}$ je najmenšia konvexná množina $\mathcal{M}$ obsahujúca množinu $\mathcal{N}$.

PRÍKLAD. Konvexným obalom dvojice bodov je úsečka, trojice nekolineárnych bodov je trojuholník.

Čo je konvexným obalom dvojice úsečiek? Čo je konvexným obalom polpriamky a bodu?

konvexné kombinácie bodov??? bolo by treba zaviesť barycentrické kombinácie viacerých bodov.

Cvičenia

1. Skonstruovať kolmicu z daného bodu na danú priamku – aj s argumentáciou, že je to naozaj kolmica (ako dôkaz, že kolmica existuje), t.j. dôraz je rozборе.
2. Súvis medzi deliacim pomerom a afinnou súradnicou bodu.
3. Konštrukcia dotyčnice k danej kružnici z daného bodu mimo nej:
 - pomocou Tálesovej kružnice,
 - pomocou rovnoramenného trojuholníka.
4. Konštrukcia spoločnej dotyčnice k daným dvom kružniciam:
 - zväčšovaním/zmenšovaním polomeru (dilatačná metóda),
 - s využitím rovnolahlosti.
5. Stredový a obvodový uhol, efektívna konštrukcia?

KAPITOLA 2

Stereometria

Pracujeme v reálnom euklidovskom priestore $\mathbb{E}^3$.

K základným objektom pribúdajú roviny, ktoré budeme označovať malými písmenami gréckej abecedy: $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \pi, \dots$

1. Incidencia, vzájomné polohy

Priamky v $\mathbb{E}^3$ sú

- **rôznobežné**, ak majú spoločný jeden bod; ten nazývame **priesečíkom**,
- **rovnobežné**, ak sú totožné alebo ak sú disjunktné a zároveň ležia v jednej rovine,
- **mimobežné**, ak neležia v jednej rovine.

Priamka s rovinou sú

- **rovnobežné**, ak sú disjunktné alebo incidentné,
- **rôznobežné**, ak majú spoločný jeden bod, ich **priesečík**.

Dve roviny sú

- **rovnobežné**, ak sú totožné alebo disjunktné,
- **rôznobežné**, ak majú spoločnú priamku ktorú potom nazývame ich **priesečnicou**.

Je užitočné si uvedomiť, kedy je rovina jednoznačne určená. Rovinu môžu určiť:

- 3 nekolinárne body, $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$,
- bod a priamka, ktorá ním neprechádza, $\alpha = \overleftrightarrow{Ap}$,
- dve rôzne rovnobežné priamky, $\alpha = \overleftrightarrow{pq}$,
- dve rôznobežné priamky, $\alpha = \overleftrightarrow{pq}$,
- bodom a smer, t.j. ako rovina prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s nejakou inou danou rovinou.

Priamka v trojrozmernom euklidovskom priestore je určená ako v rovine: dvojicou s ňou incidentným bodom alebo jedným bodom a smerom.

Zväzok rovín je množina všetkých rovín, ktoré prechádzajú spoločnou priamkou, tzv. **osou zväzku**.

Trs rovín je množina všetkých rovín, ktoré prechádzajú jedným bodom, tzv. **stredom zväzku**.

Osnova priamok je množina všetkých navzájom rovnobežných rovín.

1.1. Rovnobežnosť rovín a priamok. Dokazovať vôbec kritériá rovnobežnosti??? asi radšej nie.... niečo zaujímavejšie radšej robiť???

VERA 2.1 (Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny).

$$p \parallel \alpha \Leftrightarrow \exists q \subset \alpha : p \parallel q.$$

(Priamka je rovnobežná s rovinou, ak je rovnobežná s nejakou priamkou tejto roviny.)

Dôkaz. Ak priamka p leží v uvažovanej rovine α , nie je čo dokazovať. Budeme preto predpokladať, že tento špeciálny prípad nenastáva.

Dokazujeme dve implikácie.

„ $\Rightarrow$ “: Predpokladajme, že $p \parallel \alpha$, t.j. $\alpha \cap p = \emptyset$. Nech $A \in \alpha$ je ľubovoľný bod. Rovina $\beta = \overleftrightarrow{pA}$ má s rovinou α bod S spoločný, preto podľa axiómy majú spoločnú celú priamku q a to už je hľadaná priamka:

- obe priamky ležia v spoločnej rovine β ,
- ak by p a q mali spoločný nejaký bod, bol by tento bod priesečníkom p a α , čo je spor s predpokladom.

„ $\Leftarrow$ “: Nech teraz existuje priamka $q \subset \alpha$ taká, že $q \parallel p$. Nech $\beta = \overleftrightarrow{pq}$. Zrejme potom $q = \alpha \cap \beta$. Ak by p a α boli rôznobežné, t.j. existoval by bod $A \in p \cap \alpha$, ležal by tento bod aj v rovine β (lebo $p \subset \beta$), teda aj na priamke $q = \alpha \cap \beta$ a priamky p , q by neboli rovnobežné. $\square$

TVRDENIE 2.2. Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď všetky priamky jednej roviny sú rovnobežné s druhou rovinou.

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \forall a \subset \alpha : a \parallel \beta$$

Dôkaz. Ak $\alpha = \beta$, je tvrdenie zjavné. Predpokladajme teda, že $\alpha \neq \beta$.

„ $\Rightarrow$ “: Triviálne.

„ $\Leftarrow$ “: Nepriamo: nech $\alpha \not\parallel \beta$, nech $p = \alpha \cap \beta$ a nech $P \in p$. Ak $a \subset \alpha$ je priamka cez P rôzna od p (existuje celý zväzok), tak $a \not\parallel \beta$. $\square$

VERA 2.3 (Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín). Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď jedna z nich je rovnobežná s dvoma rôznobežkami druhej.

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists a, a' \subset \alpha : a \parallel \beta \wedge a' \parallel \beta$$

Dôkaz. Znovu budeme predpokladať, že $\alpha \neq \beta$. „ $\Rightarrow$ “ zrejme z predchádzajúcej vety.

„ $\Leftarrow$ “ nech $p = \alpha \cap \beta$ je priesečnica. Potom pre priamky $a, a', p \subset \alpha$ nemôže platiť, že rôznobežky a, a' sú obe rovnobežné s priamkou p . $\square$

Tranzitívnosť rovnobežnosti – len ako predstavovacie cvičenie (???).

PRÍKLAD. Daný je štvorsten $ABCD$. Bodom $M \in AD$ zostrojíte rovinu rovnobežnú k $\overleftrightarrow{BCD}$. (vypracovať???)

PRÍKLAD. o ťažisku štvorstena???

Základné konštrukcie:

- nájsť priesečnicu dvoch rovín. Pre určenie priesečnice nájdeme jej dva body. Veľa konštrukcií sa v závere redukuje na toto zadanie.

- nájsť priesečník priamky p s rovinou α . Štandardným je postup:
 - (1) priamkou p preložíme vhodnú rovinu β ,
 - (2) nájdeme priesečnicu q rovín α a β ,
 - (3) $M = p \cap q$, potom M je hľadaný priesečník p a α .
 - príklad na kocke $ABCDEFGH$, $\alpha = \overleftrightarrow{BMH}$ kde $H \in CG$, $p = \overleftrightarrow{PQ}$, kde $P \in AB$ a $Q \in GH$.
- rozhodnúť, či dve dané priamky p, q sú rôznobežné alebo mimobežné Postupovať môžeme takto:
 - (1) priamkou p preložíme rovinu α ,
 - (2) nájdeme priesečník $M = \alpha \cap q$,
 - (3) p, q sú rôznobežné vtedy, keď M leží aj na q .

PRÍKLAD. V štvorsene $ABCD$ nech $(ABP) = (BCQ) = (CDR) = (DAS) = -1$. Aká je vzájomná poloha $\overleftrightarrow{PR}$ a $\overleftrightarrow{QS}$?

Častou úlohou v stereometrii je hľadanie rezu mnohostenom danou rovinou. Pri riešení sa výrazne opierame o fakt, že do hry vstupuje viac rovín.

Nech α, β sú dve rôzne roviny, ktoré budú reprezentovať roviny stien mnohostena, a hľadáme ich prienik s tretou rovinou ρ :

1. ak α a β sú rovnobežné:
 - (1a) aj ρ je z tej istej osnovy, potom ani jednu z rovín ρ nepretína
 - (1b) ρ je s nimi rôznobežná, potom priesečnice sú navzájom rovnobežné
2. ak α a β sú rôznobežné, nech p je ich priesečnica
 - (2a) ρ prechádza tou istou priesečnicou,
 - (2b) ρ pretína α v priamke q , ktorá je rovnobežná s p , potom aj priesečnica $r = \rho \cap \beta$ je s nimi rovnobežná
 - (2c) ρ pretína α v priamke r , ktorá je rôznobežná s p , potom aj priesečnica r rovín ρ a β je s nimi rôznobežná a priamky p, q, r sa stretávajú v spoločnom bode

PRÍKLAD. V kocke $ABCD A' B' C' D'$ nech $M \in CC'$. Treba nájsť rez kocky rovinou $\overleftrightarrow{BMD'}$.

PRÍKLAD. V štvorsene $ABCD$ nech $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, kde

- (a) $(ABK) = (BCL) = -1$,
- (a) $(ABK) = -1$, $(BCL) \neq -1$.

Treba nájsť rez štvorstena rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$.

(spoločná) priečka mimobežiek:

pokrývajú priechy celý priestor? zamyslieť sa, ktoré body nepokryjú

1. priečka mimobežiek cez daný bod - výpočtovo najrýchlešie, aj najnázornejšie ako prienik roviny a priamky - v deske preložíme rovinu každou z mimobežiek, priečka je priesečnica

2. priečka mimobežiek s daným smerom

2. Metrické záležitosti

S kolmostou různoběžných přímek nemáme žádný problém: keďže ležia v jednej rovine, skúmame ich kolmosť v tejto rovine. Mimobežné priamky p, q nazývame **kolmými**, ak existujú p', q' navzájom rôznobežné, pre ktoré

$$p' \parallel p, q' \parallel q \quad \text{a} \quad p' \perp q'.$$

O priamke a rovine budeme hovoriť, že sú navzájom **kolmé**, ak je táto priamka kolmá na všetky priamky roviny.

VETA 2.4 (Kritérium kolmosti priamky a roviny).

$$p \perp \alpha \Leftrightarrow \exists q, r \subset \alpha : q \nparallel r, p \perp q, p \perp r.$$

(Priamka je kolmá na rovinu, ak je kolmá na dve rôznobežné priamky tejto roviny.)

Dôkaz. „ $\Rightarrow$ “: Triviálne.

„ $\Leftarrow$ “: Z definície kolmosti priamok môžeme predpokladať, q, r prechádzajú priesečníkom $p \cap \alpha$. ??? dokončiť $\square$

TVRDENIE-DEFINÍCIA 2.5. Pre každú rovinu a bod existuje práve jedna kolmica na danú rovinu prechádzajúca daným bodom, tzv. **kolmopremietacia priamka**. Priesečník roviny a kolmice je **päta kolmice** alebo tiež **kolmý priemet bodu do roviny**.

Dôkaz. Existencia: ??? dorobiť

Jednoznačnosť: presne ako v dôkaze Tvrdenia 1.1 by vznikol trojuholník s dvoma pravými uhlami, čo je spor. $\square$

TVRDENIE-DEFINÍCIA 2.6. Pre každú priamku a bod existuje práve jedna rovina kolmá na danú priamku a prechádzajúca daným bodom, tzv. **kolmopremietacia rovina**. Priesečník priamky a tejto roviny je **kolmý priemet bodu na priamku**.

Dôkaz. Existencia: ??? dorobiť

Jednoznačnosť: ako v predchádzajúcich prípadoch by vznikol trojuholník s dvoma pravými uhlami, čo je spor. $\square$

Vzdialenosť bodu od roviny / od priamky je vzdialenosť tohto bodu od jeho kolmého priemetu na rovinu / priamku. Podobne ako v prípade vzdialenosti bodu od priamky v rovine nahliadneme, že ide o najkratšiu spomedzi vzdialeností medzi daným bodom a ľubovoľným bodom uvažovanej roviny / priamky.

Doteraz vyslovené definície a vykonané pozorovania o vzdialenostiach nás motivujú k nasledovnej súhrnnej definícii: **vzdialenosť dvoch útvarov** $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ (bodov, priamok, rovín) je najmenšia dosiahnuteľná vzdialenosť medzi bodmi týchto útvarov:

$$|\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2| = \min\{|AB| \mid A \in \mathcal{U}_1, B \in \mathcal{U}_2\}.$$

Potom vieme, že

- vzdialenosť dvoch rôznobežných alebo incidentných útvarov (priamok/rovín) je 0,
- vzdialenosť dvoch rôznych rovnobežných priamok (rovín) je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky (roviny) od druhej,

- vzdialenosť priamky a s ňou rovnobežnej roviny je vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky od tejto roviny.

V zaujímavej situácii sa ocitneme, keď sa snažíme nájsť vzdialenosť dvoch mimobežných priamok. ??? dokončiť

uhol priamok???

uhol priamky s rovinou???

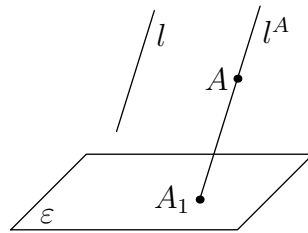
uhol dvoch rovín???

kolmé roviny, kritérium kolmosti dvoch rovín???

3. Princípy premietania

3.1. Rovnobežné premietanie. Nech je daná rovina ε (**priemetňa**) a priamka l (**smer premietania**, určuje tzv. **osnovu premietania**) taká, že $l \nparallel \varepsilon$. **Rovnobežné premietanie** v smere l do roviny ε je zobrazenie $\mathbb{E}^3 \rightarrow \varepsilon$, ktoré každému bodu A priradí bod A_1 nasledovne:

- (1) nech l^A je taká priamka, že $l^A \parallel l$ a $l^A \ni A$; (**premietacia priamka bodu A**),
- (2) $A_1 = l^A \cap \varepsilon$ je (**rovnobežný priemet bodu A**).



NA ZAMYSLENIE. Ktoré body sú pevnými bodmi rovnobežného premietania? Ktoré priamky sú samodružnými a ktoré z nich sú silne samodružnými?

Vlastnosti rovnobežného premietania:

- Ak je priamka p rovnobežná so smerom premietania, je jej obrazom jeden bod, jej priesečník s priemetňou.
- Ak priamka p nie je rovnobežná so smerom premietania, je jej obrazom priamka. Vhodné zúženie premietania je vtedy bijekciou medzi priamkou a jej obrazom a z Tvrdenia 1.7(a) vyplýva, zachováva deliaci pomer bodov na p .

PRÍKLAD. Nech $p, q \subset \mathbb{E}^3$ sú dve rôzne priamky, ani jedna z nich nech nie je osnovová. Ako môže vyzeráť priemet tejto dvojice, ak sú p, q

- rovnobežné,
- rôznobežné,
- mimobežné?

PRÍKLAD. Ako vyzerá premietací útvar (t.j. zjednotenie premietacích priamok všetkých bodov objektu) a priemet

- rovinného n -uholníka,
- kružnice,
- sféry?

3.2. Stredové premietanie.

- základné pojmy (podľa g3, včetně úbežníka)
- deliaci pomer nie je invariant, dvojpomer áno (dôkaz - je v planimetrii)

KAPITOLA 3

Osová afinita

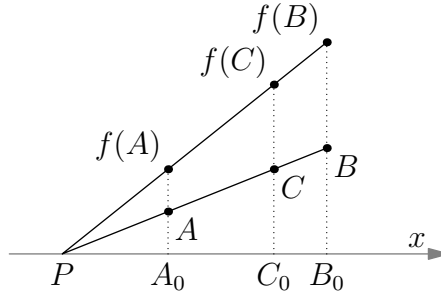
1. Afinita roviny

Zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je **afinita**, ak obrazom priamky je priamka a navyše f zachováva deliaci pomer, t.j.

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{E}^2 (P \neq Q \neq R \neq P) : (f(P)f(Q)f(R)) = (PQR).$$

Každá zhodnosť či podobnosť je aj afinitou.

PRÍKLAD. Presvedčíme sa, že afinitou je aj zobrazenie $f : (a_1, a_2) \mapsto (2a_1, a_2)$. Ak je priamka $\overleftrightarrow{AB}$ rovnobežná s x - alebo y -osou, zjavne f zobrazí túto priamku na seba a zachová deliaci pomer. Inak nech P je jej priesečník s x -osou a A_0, B_0, C_0 nech sú kolmé priemety bodov A, B, C na x -os.



Z podobnosti $\triangle PA_0A$, $\triangle PB_0B$ a $\triangle PC_0C$ usúdime, že aj trojuholníky $\triangle PA_0f(A)$, $\triangle PB_0f(B)$ a $\triangle PC_0f(C)$ sú podobné a odtiaľ sú body $f(A), f(B), f(C)$ kolineárne a tiež príslušné pomery dĺžok sú zhodné.

Vidíme, že afinity sú väčšou triedou transformácií $\mathbb{E}^2$ ako podobnosti.

Z definície afinity je zjavné, že zložením dvoch afinít je tiež afinita.

V nasledovnej sérii tvrdení budeme postupne odhaľovať geometrické vlastnosti afinity.

TVRDENIE 3.1. *Reštrikcia (zúženie) afinity na ľubovoľnú priamku p je bijekciou medzi bodmi priamok p a $f(p)$.*

Dôkaz. Nech P, Q sú také body na priamke p , že $f(P) \neq f(Q)$, t.j. $\overleftrightarrow{f(P)f(Q)} = p'$. Potom každý bod $Y \in p'$, $Y \neq f(P)$, $Y \neq f(Q)$ má v afinite f na priamke p svoj vzor, konkrétne ten bod X pre ktorý $(PQX) = (f(P)f(Q)Y)$. Z jednoznačnosti medzi bodmi priamky a ich deliacimi pomermi vzhľadom na pevne zvolenú dvojicu bodov potom vyplýva, že f zobrazuje priamku p na priamku p' jedno-jednoznačne. $\square$

DÔSLEDOK 1. *Afinita roviny je injektívne zobrazenie.*

Dôkaz. Ak by pre rôzne body A, B boli ich obrazy v afinite totožné, dostali by sme spor s Tvrdením 3.1 pre priamku $\overleftrightarrow{AB}$. $\square$

DÔSLEDOK 2. *V afinite sú obrazom rovnobežných rôznych priamok rovnobežné rôzne priamky.*

TVRDENIE 3.2. *Nech $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je afinity. Ak A, B, C nie sú kolineárne, potom ani $f(A), f(B), f(C)$ nie sú kolineárne.*

Dôkaz. Sporom, nech sa nekolineárne body A, B, C zobrazia na jednu priamku: $f(C) \in \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$. Nech $(f(A)f(B)f(C)) = \lambda$. Potom pre bod $X \in \overleftrightarrow{AB}$ taký, že $(ABX) = \lambda$, platí $f(X) = f(C)$, pričom $X \neq C$, čo je spor. $\square$

TVRDENIE 3.3. *Afinita roviny je bijektívne zobrazenie. Inverzným zobrazením k afinite je tiež afinity.*

Dôkaz. Injektívnosť sme už vyargumentovali. Surjektívnosť tiež nahliadneme pomerne ľahko: nech p, q sú rôznobežky, ich obrazmi sú tiež rôznobežky $f(p), f(q)$. Ak každým bodom priamky q vedieme rovnobežku k priamke p , táto osnova jednak pokryje rovinu vzorov, a tiež obrazy priamok tejto osnovy zjavne pokrývajú rovinu obrazov – zobrazenie je tak surjektívne.

Keďže ide o bijekciu, existuje inverzné zobrazenie, ktoré je tiež bijekciou. Z Tvrdenia 3.2 vieme usúdiť, že aj toto inverzné zobrazenie zobrazí priamku na priamku. To, že tiež zachováva deliaci pomer, sa ukazuje rovnako, ako sme overili, že inverzným zobrazením k izometrii je tiež izometria:

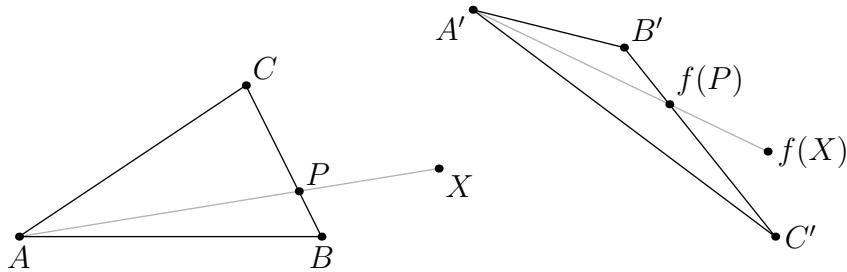
Nech f je pôvodná afinity, ktorá trojicu rôznych kolineárnych bodov A, B, C zobrazí v tomto poradí do trojice A', B', C' . Potom

$$(f^{-1}(A')f^{-1}(B')f^{-1}(C')) = (f^{-1}(f(A))f^{-1}(f(B))f^{-1}(f(C))) = (ABC) = (A'B'C').$$

$\square$

META 3.4. *Afinita roviny je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov.*

Dôkaz.



Nech f je afinity a nech A, B, C sú nekolineárne. Označme $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Nech $X \in \mathbb{E}^2$ je ľubovoľný bod. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\overleftrightarrow{AX} \not\parallel \overleftrightarrow{BC}$. Obraz bodu $P = \overleftrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{BC}$ je na priamke $\overleftrightarrow{B'C'}$ jednoznačne určený deliacim pomerom (BCP) . Následne je obraz bodu $X \in \overleftrightarrow{A'f(P)}$ jednoznačne určený deliacim pomerom (APX) . $\square$

2. Osová afinita

2.1. Ak má afinita f dva pevné body A, B , potom celá priamka $\overleftrightarrow{AB}$ pozostáva z pevných bodov: nech C je ďalší bod na $\overleftrightarrow{AB}$ a nech $(ABC) = \lambda$. Potom $(f(A)f(B)f(C)) = \lambda$, no keďže $f(A) = A$ a $f(B) = B$, platí, že $(ABf(C)) = \lambda$ a teda $C = f(C)$.

Afinitu, ktorej samodružné body tvoria priamku, nazývame **osovou afinitou**. Priamku samodružných bodov nazývame **osou** afinity.

Z Vety 3.4 vyplýva, že osová afinita je jednoznačne určená svojou osou a obrazom jedného bodu, ktorý na nej neleží:

$$f(A) = A, f(B) = B \quad (\text{t.j. } \overleftrightarrow{AB} \text{ je os afinity}), \quad f(C) = C' \neq C.$$

POZNÁMKA. Identita je afinita roviny, ktorá má tiež priamku pevných bodov, dokonca nekonečne veľa priamok pevných bodov, no medzi osové afinity ju nezaraďujeme. Od osovej afinity vyžadujeme, aby mala striktne jednu priamku pevných bodov a žiaden ďalší pevný bod.

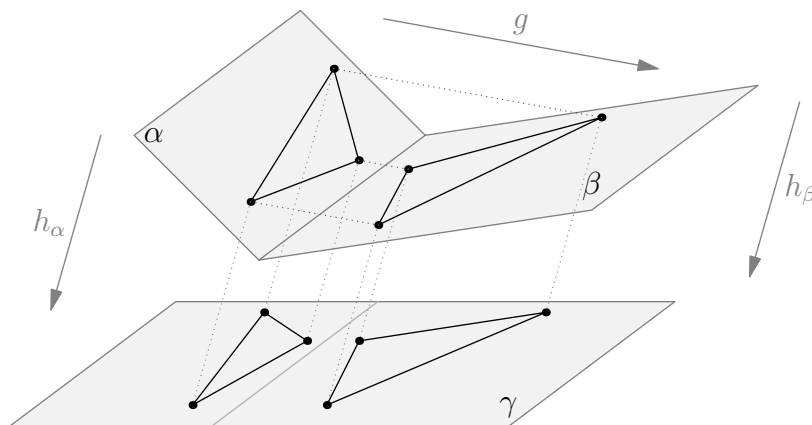
Ak by sme osové afinity skladali, rýchlo zistíme, že zložením dvoch osových afínit už nemusíme dostať osovú afinitu – napríklad keď zložením dvoch osových súmerností získame posunutie. Ak by sme však skladali iba osové afinity s tou istou pevne zvolenou osou, vo výsledku máme stále osovú afinitu s touto osou alebo identitu. Toto pozorovanie by nabádalo k rozhodnutiu zaradiť identitu medzi osové afinity.

No na druhej strane, mnohé tvrdenia o vlastnostiach a invariantoch osovej afinity nedávajú pre identitu zmysel. Javí sa preto vhodnejšie identitu medzi osové afinity neradiť, a podľa toho sme osovú afinitu aj definovali.

2.2. Osová afinita ako „záznam“ rovnobežného premietania. Uvažujme teraz dve rôznobežné roviny $\alpha, \beta \in \mathbb{E}^3$ a smer určený priamkou l takou, že $l \nparallel \alpha$, $l \nparallel \beta$. Nech β je priemetňou rovnobežného premietania so smerom l a nech g je zúženie tohto premietania na rovinu α , t.j. $g : \alpha \rightarrow \beta$. Ľahko nahliadneme, že g je afinitou:

- obrazom priamky v α je priamka v β ,
- z Tvrdenia 1.7(i) vyplýva, že g zachováva deliaci pomer.

(Niekdedy sa toto zobrazenie zo zrozumiteľných dôvodov nazýva aj osová afinita medzi rovinami.)



V druhom kroku majme tretiu rovinu γ a smer premietania určený priamkou m , ktorá nie je rovnobežná so žiadnou z rovín α , β , γ , a sledujme premietanie h pozdĺž tejto priamky na priemetňu γ . Vidíme, že

- zúženie h na rovinu α je afinita $\alpha \rightarrow \gamma$, označme ju h_α ,
- zúženie h na rovinu β je afinita $\beta \rightarrow \gamma$, označme ju h_β .

Zobrazenie $f = h_\beta \circ g \circ h_\alpha^{-1}$ je afinita $\gamma \rightarrow \gamma$, t.j. afinita euklidovskej roviny s priamkou samodružných bodov $h(p)$, kde $p = \alpha \cap \beta$. Teda pokiaľ f nie je identitou, ide o osovú afinitu.

Teraz naopak, nech teraz f je ľubovoľná osová afinita euklidovskej roviny. Presvedčíme sa, že f je rovnobežným priemetom rovnobežného premietania medzi dvoma rovinami (t.j. osovej afinity medzi rovinami).

Vnorme rovinu, ktorú f transformuje, do $\mathbb{E}^3$ a označme ju γ . Nech $o \subset \gamma$ je os afinity f . Zvolíme si ľubovoľnú rovinu α takú, že o je priesečnica α a γ , a tiež si zvolíme smer rôznobežný s oboma rovinami (priamku m). Nech h je premietanie na γ v smere m . Potom $g : \alpha \rightarrow \gamma$, $g = f \circ h$ je rovnobežné premietanie medzi týmito dvoma rovinami.

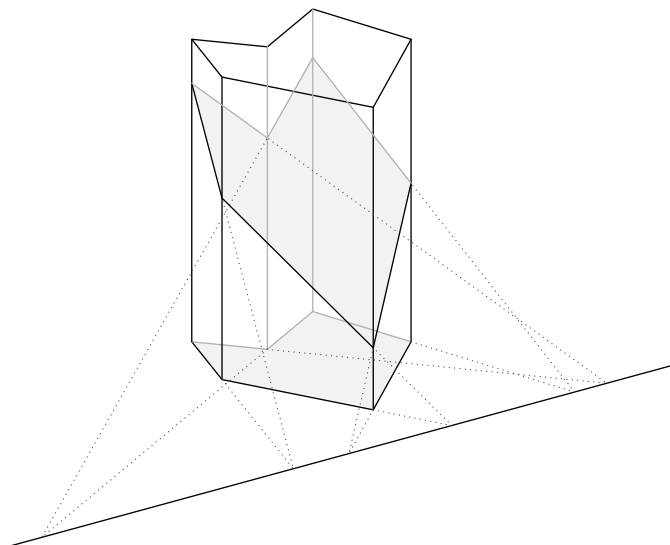
TVRDENIE 3.5. *Nech f je osová afinita roviny. Potom pre všetky $A \in \mathbb{E}^2$ neležiace na osi afinity patria priamky $\overleftrightarrow{Af(A)}$ jednej osnove.*

Dôkaz. Každú osovú afinitu $\mathbb{E}^2$ môžeme teda vnímať ako rovnobežný priemet rovnobežného premietania medzi dvoma rovinami v $\mathbb{E}^3$. Keď sledujeme situáciu v $\mathbb{E}^3$, teda premietanie $g : \alpha \rightarrow \beta$ so smerom l , pre každý bod $B \in \alpha$ neležiaci na priesečnici $\alpha \cap \beta$ máme, že $\overleftrightarrow{Bg(B)} \parallel l$. Ľubovoľné dva rôzne body $B, C \in \alpha$ mimo priesečnice tak určia rovnobežky $\overleftrightarrow{Bg(B)}$ a $\overleftrightarrow{Cg(C)}$ v $\mathbb{E}^3$, ktoré sa zobrazujú do rovnobežiek spájajúcich každý bod s jeho obrazom v afinite f . $\square$

TVRDENIE 3.6. *Nech $o \subset \mathbb{E}^2$ je priamka a nech A, A' sú rôzne body neležiace na priamke. Potom existuje práve jedna osová afinita, pre ktorú je o jej osou a ktorá A zobrazí do A'*

Dôkaz. Jednoznačnosť vyplýva, ako už bolo spomenuté, z Vety 3.4. O existencii sa presvedčíme napríklad „zdvihnutím“ celej situácie do trojrozmerného priestoru: vnoríme našu rovinu ako rovinu γ do $\mathbb{E}^3$ a zvolíme si rovinu α tak, aby o (striktne: obraz o po vnorení) bola priesečnicou α a γ . Zvolíme ešte smer premietania m rôznobežne s α aj γ a premietneme bod A v tomto smere do roviny α , označme priemet ako A° . Rovnobežné premietanie $\alpha \rightarrow \gamma$, $A^\circ \mapsto A'$ sa potom spätným premietaním do γ pozdĺž m stane hľadanou afinitou. $\square$

Užitočným dôsledkom úvodného pozorovania v tejto časti je získanie nového pohľadu na konštrukciu rezov hranolových (a čoskoro aj valcových) plôch: dva rezy hranolovou plochou (napríklad podstava a rez danou, s podstavou rôznobežnou rovinou) sú vo vzťahu rovnobežného premietania medzi týmito rovinami, kde smer premietania je smer bočných hrán. Pokiaľ máme situáciu zakreslenú v nejakom rovnobežnom premietaní (napríklad vo voľnom rovnobežnom premietaní), bude rez hranolovej plochy danou rovinou obrazom podstavy v osovej afinite, ktorej osou je priesečnica roviny podstavy a roviny rezu (presnejšie voľný rovnobežný priemet priesečnice).



2.3. Dôležitosť osovej afinity.

VETA 3.7. (a) *Nech A, B, C a A', B', C' sú dve trojice nekolineárnych bodov v $\mathbb{E}^2$. Potom existuje práve jedna afinita f taká, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.*

(b) *Každá afinita roviny sa dá napísať ako zloženie najviac troch osových afinít.*

Dôkaz. Jednoznačnosť v časti (a) sme už ukázali vo Vete 3.4. Existenciu budeme teraz demonštrovať dôkazom časti (b) Postupovať budeme veľmi podobne ako v dôkaze Vety 1.4, tentokrát je dôkaz jednoduchší.

Ak $A \neq A'$, prvá afinita f_1 nech má takú os, aby žiadny z bodov A ani A' na nej neležal, a nech $f_1(A) = A'$, čo podľa Tvrdenia 3.6 urobiť vieme. Ak $A = A'$, tento krok vynecháme, podobne pri zvyšných dvoch bodoch.

Ak teraz $f_1(B) \neq B'$, za f_2 zvolíme afinitu, ktorej os prechádza bodom A' , neprechádza žiadnym z bodov $f_1(B)$ a B' a nech $f_2(f_1(B)) = B'$.

Dvoma osovými afinitami sme už body A a B zobrazili na A' a B' . Keďže A', B', C' sú nekolineárne a tiež body $A', B', f_2(f_1(C))$ sú nekolineárne (viď Tvrdenie 3.2), priamka $\overleftrightarrow{A'B'}$ neprechádza ani bodom C' , ani bodom $f_2(f_1(C))$. Zvolíme ju za os tretej osovej afinity f_3 a afinitu dourčíme tak, aby $f_3(f_2(f_1(C))) = C'$. $\square$

Vidíme teda, že osová afinita hrá v triede všetkých afinít roviny presne tú istú úlohu, akú hrá osová súmernosť medzi zhodnosťami: je základným prvkom, z ktorých „vyskladáme“ všetky ostatné afinity.

2.4. Osová afinita v praxi deskriptívnej geometrie. Nech o je os osovej afinity f a nech bod A neležiaci na o zobrazí f do bodu A' , kde $A' \neq A$, $A' \notin o$. Vieme už, že týmto je osová afinita f jednoznačne určená. Pre skrátenie zápisu budeme pre každý bod X označovať jeho obraz v afinitе f ako X' .

TVRDENIE-DEFINÍCIA 3.8. *Nech o je os osovej afinity f a nech f zobrazí $A \notin o$ do A' . Nech $\overleftrightarrow{AA'} \parallel o$. Potom pre všetky $B \notin o$ platí*

$$(i) \quad \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{AA'},$$

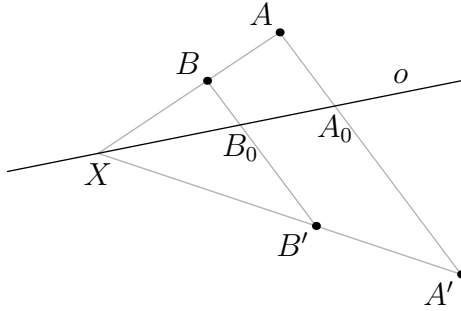
$$(ii) (B'BB_o) = (A'AA_o), \text{ kde } A_o = o \cap \overleftrightarrow{AA'} \text{ a } B_o = o \cap \overleftrightarrow{BB'}.$$

Smer $\overleftrightarrow{AA'}$ nazývame **smerom afinity** a číslo $(A'AA_o)$ **charakteristikou afinity** f .

Ak je smer afinity kolmý na os, hovoríme o **kolmej osovej afinite**.

Dôkaz. O pravdivosti (i) sme sa už presvedčili pomocou interpretácie f ako priemete rovnobežného premietania, dá sa to ale jednoducho nahliadnuť aj z elementárnych vlastností afinity. Priamka AA' je samodružná, keďže bod A_o sa zobrazí na seba a A na A' . Preto priamka b cez B rovnobežná s $\overleftrightarrow{AA'}$ sa podľa dôsledku Tvrdenia 3.2 musí zobrazit tiež na rovnobežnú priamku. Keďže $B_o = b \cap o$ je pevný, leží B tiež na p .

Pre dôkaz (ii) uvažujme $X = o \cap \overleftrightarrow{AB}$. Keďže X je pevný, leží aj na $\overleftrightarrow{A'B'}$ a z podobnosti trojuholníkov dostávame dokazované tvrdenie.



Ak by $\overleftrightarrow{AB}$ bola rovnobežná s osou o , bola by s ňou rovnobežná aj $\overleftrightarrow{A'B'}$ a aj v tomto prípade je tvrdenie (ii) pravdivé. $\square$

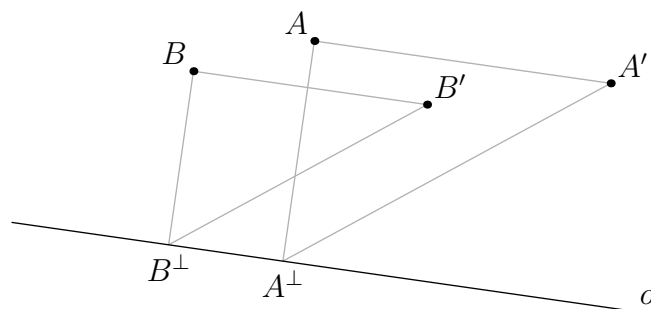
Osová afinita zúžená na priamku rovnobežnú so smerom afinity je teda škálovaním (podobnosťou) tejto priamky s pevným bodom v priesečníku tejto priamky s osou o a škálovacím faktorom rovným charakteristike afinity.

Všimnime si tiež, že postup v dôkaze nám dáva aj návod, ako konštruovať obrazy jednotlivých bodov v danej osovej afinite.

TVRDENIE-DEFINÍCIA 3.9. *Ak pre afinitu f s osou o a bod A neležiaci na osi platí $AA' \parallel o$, potom pre ľubovoľný bod B mimo osi platí $BB' \parallel o$. Takáto osová afinita sa nazýva **elácia** (v počítačovej grafike **skosenie**, angl. **shear**).*

Dôkaz. Ide o pomerne priamočiary dôsledok predchádzajúceho tvrdenia: ak by $\overleftrightarrow{BB'}$ bola rôznobežná s osou, potom všetky priamky určené bodom mimo osi a jeho obrazom boli s $\overleftrightarrow{BB'}$ rovnobežné. $\square$

Obraz bodu v elácii nájdeme s využitím faktu, že afinita zachováva rovnobežnosť, viď obrázok.



NA ZAMYSLENIE. Vedeli by ste analyticky popísať osovú afinitu, čiže nájsť predpis, ako zo súradníc bodu vypočítať súradnice jeho obrazu? Tieto vzorce budú jednoduché, ak si vhodne zvolíte súradnicovú sústavu: nech prvá súradnicová os je totožná s osou afinity a druhá súradnicová os nech je

- kolmá na prvú, ak ide o eláciu,
- inak nech je rovnobežná so smerom afinity.

3. Elipsa ako afinný obraz kružnice

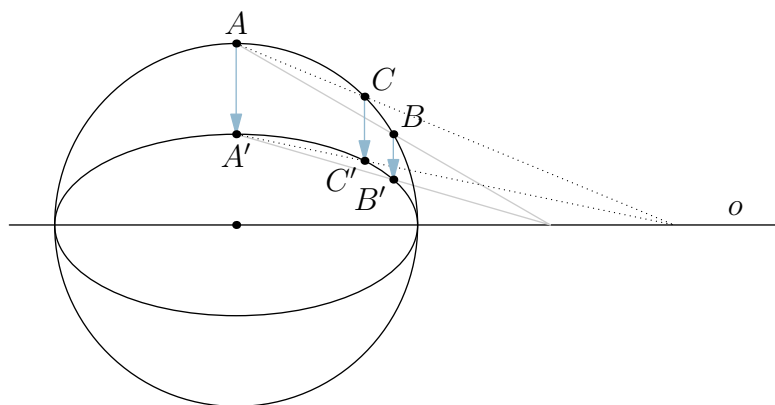
Ak uvažujeme rovnobežné premietanie medzi dvoma rovinami ako v odseku 2.2, útvarom, na ktorý sa zobrazí kružnica, je elipsa. (V špeciálnych prípadoch samozrejme to môže byť aj kružnica, no také situácie budeme v ďalších úvahách vynechávať.) To isté povedané inými slovami: rezom rotačnej valcovej plochy rovinou rôznobežnou s osou rotácie je elipsa.

Intuitívne získaná predstava je teda, že osová afinita, a tiež ľubovoľná afinita, typicky zobrazí kružnicu na elipsu. Pri tomto tvrdení spolu so skúmaním geometrie elipsy, sa na chvíľu pristavíme.

Elipsa spolu s ďalšími kuželosečkami tvorí obsah samostatnej kapitoly. No elipsou je rozumné sa pre jej veľké využitie v technickej praxi zaoberať do istej miery už teraz. V tejto kapitole budeme zatiaľ elipsu vnímať výlučne ako afinný obraz kružnice. Pomocou tejto príbuznosti zavedieme základné pojmy týkajúce sa elipsy.

3.1. Obraz kružnice v kolmej osovej afinite.

PRÍKLAD. Nech f je kolmá osová afinita s charakteristikou $1/2$. Hľadáme obraz kružnice, ktorej stred leží na osi afinity f .

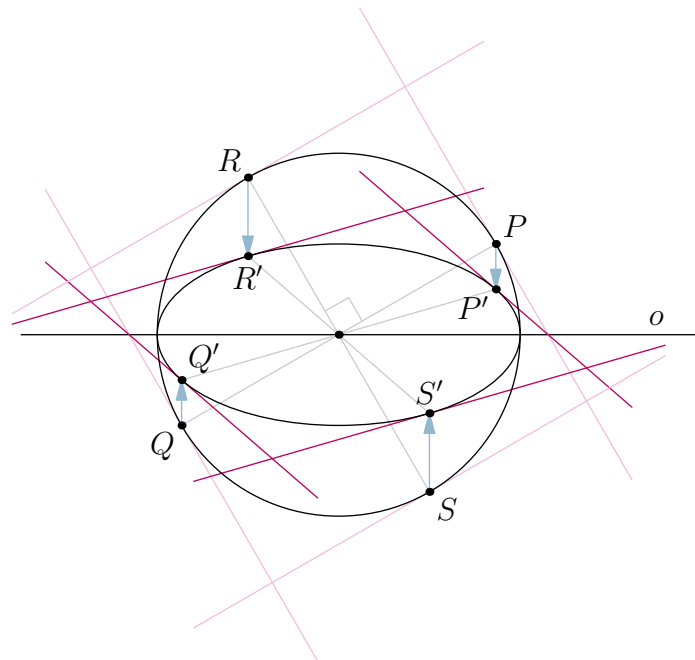


Elipsu nevieme narysovať tak jednoducho ako priamku alebo kružnicu. Elipsu spravidla len čo najpresnejšie črtáme, k čomu nám pomôže, ak najprv vykreslíme viacero jej bodov. To vieme urobiť napríklad s využitím kolmej osovej afinity.

Trochu terminológie:

- **tetiva** elipsy je úsečka spájajúca dva body elipsy,
- **stred** elipsy je obraz stredu kružnice v príslušnej afinity; keďže afinita zachováva deliaci pomer, t.j. stred úsečky zobrazuje na stred úsečky, je stred elipsy aj jej stredom súmernosti,
- **priemer** elipsy je tetiva prechádzajúca stredom elipsy, ide teda o obraz priemeru kružnice,
- **hlavná os** je najdlhší priemer elipsy, ide o tetivu spájajúcu **hlavné vrcholy** elipsy, úsečka spájajúca stred a hlavný vrchol je **hlavná poloos**, jej dĺžka sa štandardne označuje a ; analogicky **vedľajšia os** je najkratší priemer elipsy, spája **vedľajšie vrcholy** a pozostáva z dvoch **vedľajších poloosí**, dĺžka vedľajšej poloosi sa štandardne označuje b ; pre konštrukciu elipsy je vždy dôležité poznať jej hlavnú a vedľajšiu os.

Dôležitým prvkom pri konštruovaní elipsy sú **združené priemery elipsy**, čo sú obrazy dvojice navzájom kolmých priemerov kružnice. Združené priemery nemusia byť na seba kolmé, keďže afinita nezachováva kolmosť priamok, (viď na obrázku na seba kolmé priemery PQ a RS a ich obrazy). Zjavne jedinou dvojicou združených priemerov, ktoré sú na seba kolmé, sú hlavná a vedľajšia os.



Avšak keďže rovnobežnosť a deliaci pomer sa afinitou zachovávajú, aj združené priemery elipsy majú niektoré vlastnosti ako dvojica navzájom kolmých priemerov kružnice. Napríklad, ak PQ je priemer elipsy, potom

- dotyčnica elipsy v bode P je rovnobežná s priemerom združeným k PQ ,

- PQ rozpoľuje presne tie tetivy elipsy, ktoré sú rovnobežné s priemerom združeným k PQ .

Vidíme, že slovné spojenie „byť kolmý na priemer“ v prípade kružnice sa pre elipsu prekladá ako „byť rovnobežný so združeným priemerom“.

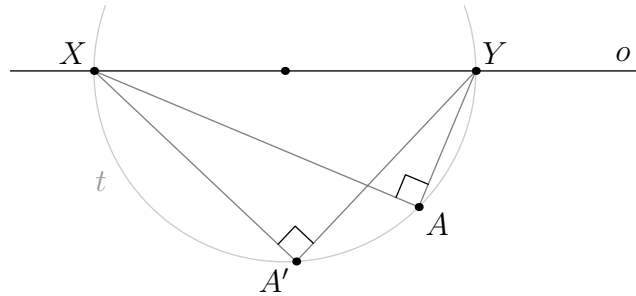
3.2. Obraz kružnice v afinite. Pozrieme sa teraz, ako sa kružnica zobrazuje v ľubovoľnej osovej afinite. Ako medzikrok najprv preskúmame, ako sa kružnica zobrazuje v ľubovoľnej, t.j. nie nutne kolmej, osovej afinite.

Ak zobrazíme dva kolmé priemery kružnice, nemusia byť aj ich obrazy (t.j. združené priemery elipsy) navzájom kolmé. Platí však, že vždy vieme nájsť takú dvojicu priemerov, ktorých kolmosť sa osovou afinitou zachová, čo je veľmi dôležitá vlastnosť:

VETA-DEFINÍCIA 3.10. *Pre každú osovú afinitu, ktorá nie je osovou súmernosťou, existuje práve jedna dvojica navzájom kolmých smerov, ktorá sa zobrazí na dvojicu tiež navzájom kolmých smerov; túto dvojicu nazývame **hlavnými smermi afinity**.*

Dôkaz. Nech f je osová afinita s osou o zobrazujúca bod A do A' . Keďže afinita zachováva rovnobežnosť, stačí pri hľadaní jej hlavných smerov sledovať dvojice kolmých priamok prechádzajúcich bodom A .

Ak $\overleftrightarrow{AA'} \perp o$, potom f je kolmá afinita a o nej už vieme, že jej hlavné smery sú smer rovnobežný s osou o a smer kolmý na o .



Nech teda $\overleftrightarrow{AA'} \not\perp o$. Potom existuje jediná kružnica so stredom na osi o prechádzajúca bodmi A aj A' , označme ju t . Nech X a Y sú priesečníky t s osou o . Z Tálesovej vety sú uhly $\angle XAY$ a $\angle XA'Y$ pravé. Navyše úsečka $A'X$ je obrazom úsečky AX , podobne $A'Y$ je obrazom AY . Vidíme, že obrazom na seba kolmých priamok $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{AY}$ sú na seba kolmé priamky $\overleftrightarrow{A'X}$ a $\overleftrightarrow{A'Y}$. Z konštrukcie tiež ľahko usúdime, že ide o jedinú dvojicu takýchto smerov. $\square$

DÔSLEDOK. *Každá osová afinita sa dá napísať ako zloženie podobnosti a kolmej osovej afinity.*

Dôkaz. Nech f je osová afinita s osou o zobrazujúca bod A do A' . Nech U, V sú také body, že $\overleftrightarrow{AU}, \overleftrightarrow{AV}$ určujú hlavné smery f a navyše nech $|AU| = |AV|$. Označme $U' = f(U)$ a $V' = f(V)$. Potom $A'U' \perp A'V'$.

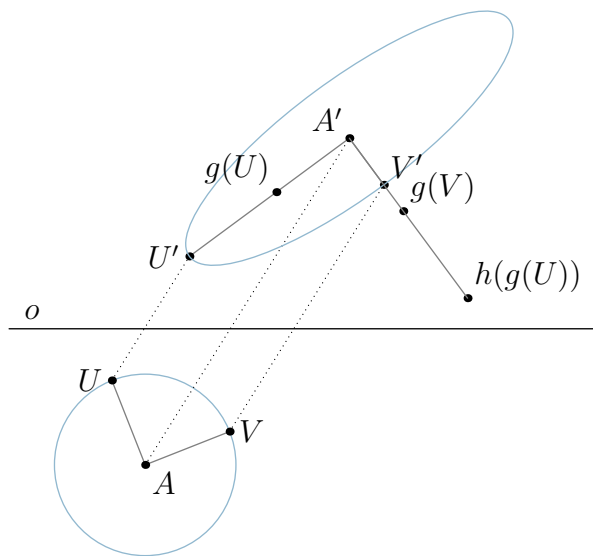
Nech $g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je taká zhodnosť, že

$$g(A) = A', \quad g(U) \in \overleftrightarrow{A'U'}, \quad g(V) \in \overleftrightarrow{A'V'},$$

(g napríklad zložíme z posunutia, otočenia a prípadne osovej súmernosti). Následne nech h je rovnoľahlosť so stredom A' , ktorá $g(U)$ zobrazí na U' . Nakoniec ešte pridáme kolmú osovú afinitu k , ktorej os je $\overleftrightarrow{A'U'}$ a ktorá $h(g(V))$ zobrazí na V' . Keďže ľubovoľná afinita je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov (Veta 3.4), platí

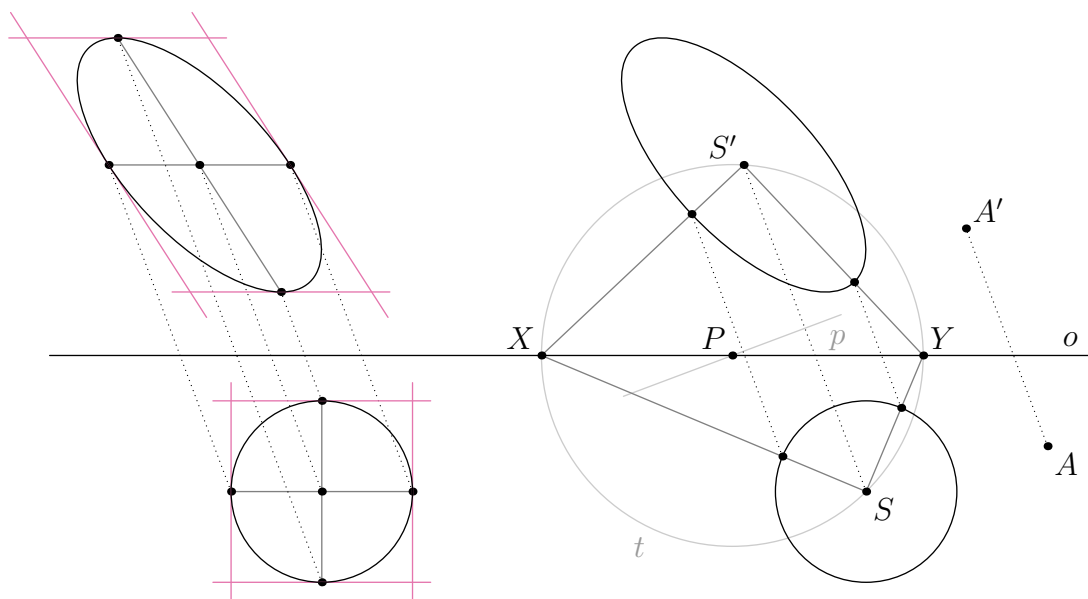
$$f = k \circ h \circ g,$$

kde $h \circ g$ je podobnosť a k je kolmá afinita.



□

Obrazom kružnice v osovej afinite je preto elipsa s tými istými vlastnosťami, ktoré sme odvodili v časti o kolmej afinite. Dôkaz Vety 3.10 navyše poskytuje návod, ako v osovej afinite f s osou o nájsť osi elipsy, ktorá je v tejto afinite obrazom kružnice k so stredom S :



- (1) nájdeme obraz stredu S kružnice: $S' = f(S)$,
- (2) nech p je os úsečky SS' ,
- (3) $P = o \cap p$,
- (4) zostrojíme kružnicu $t(P, |PS|)$,
- (5) nájdeme priesečníky X, Y osi o a kružnice t ,
- (6) priesečníky $SX \cap k$ a $SY \cap k$ sa zobrazia na hlavný a vedľajší vrchol elipsy.

VETA 3.11. *Lubovoľná afinita sa dá napísať ako zloženie podobnosti a kolmej osovej afinity.*

Dôkaz. Každá afinita je jednoznačne určená obrazmi svojich troch nekolineárnych bodov (Veta 3.4). Nech teda afinita f zobrazí nekolineárne body A, B, C na A', B', C' . Ako v predchádzajúcom dôkaze, aj teraz vyskladáme f z elementárnejších zobrazení.

Nech najprv g je zhodnosť, ktorá polpriamku $\overrightarrow{AB}$ zobrazí na polpriamku $\overrightarrow{A'B'}$ (teda bod A na bod A'). Následne nech rovnolahlosť h so stredom A' zobrazí bod $g(B)$ na bod B' . Nakoniec nech osová afinita j s osou $\overleftrightarrow{A'B'}$ zobrazí bod $h(g(C))$ na C' . Máme tak, že

$$f = j \circ h \circ g,$$

keďže sa tieto dve afinity zhodujú v troch nekolineárnych bodoch. Navyše vieme už, že j vieme napísať ako zloženie podobnosti p a kolmej afinity k , teda

$$f = k \circ p \circ h \circ g,$$

kde k je kolmá afinita a $p \circ h \circ g$ je podobnosť. □

POZNÁMKA. Analógia tohto tvrdenia pre n -rozmerný priestor je v matematike známa pod názvom *singulárny rozklad matice* (anlg. *SVD, singular value decomposition*). Geometricky: každá afinná transformácia n -rozmerného priestoru sa dá napísať ako zloženie izometrie a následného škálovania v n smeroch, ktoré sú navzájom na seba kolmé.

3.3. Trojuholníková (zástavková) konštrukcia elipsy. Skonštruujeme body elipsy k' so stredom S , ktorej dĺžka hlavnej poloosi je a a dĺžka vedľajšej poloosi je b .

Konštruovanú elipsu skúmame ako obraz dvoch kružníc v dvoch kolmých osových afinitách, ktorých osi sú na seba kolmé:

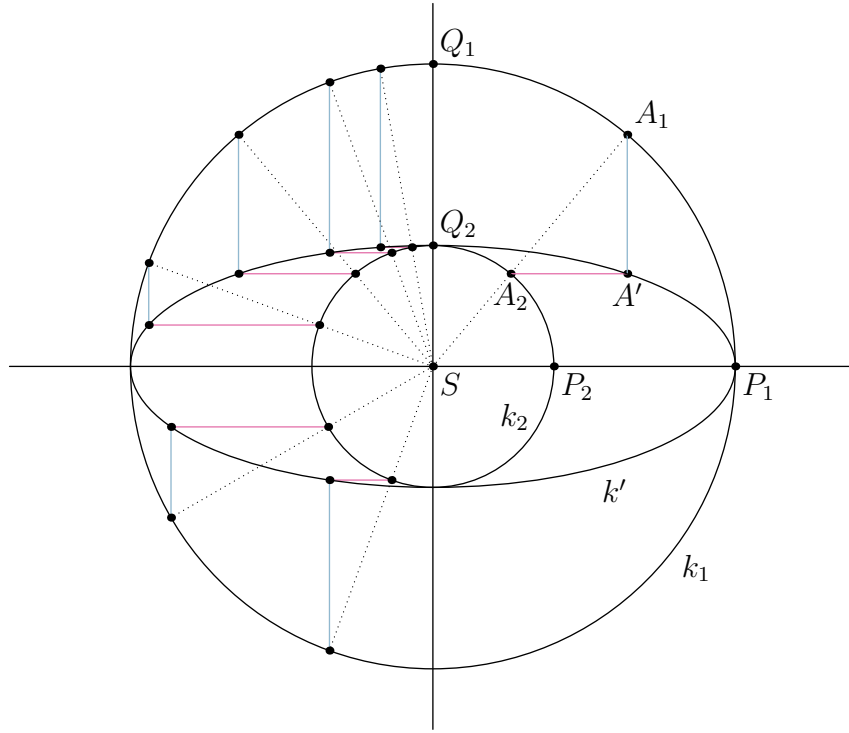
TVRDENIE 3.12. *Nech k_1 a k_2 sú sústredné kružnice a nech f_1, f_2 sú kolmé afinity, ktoré tieto kružnice zobrazia na spoločnú a s kružnicami sústrednú elipsu k' :*

$$f_1 : k_1(S, a) \mapsto k',$$

$$f_2 : k_2(S, b) \mapsto k'.$$

Nech $A' \in k'$ a nech $A_1 \in k_1$ a $A_2 \in k_2$ sú také body, že $f_1(A_1) = f_2(A_2) = A'$. Potom A_1, A_2 ležia na priamke prechádzajúcej bodom S .

Dôkaz.



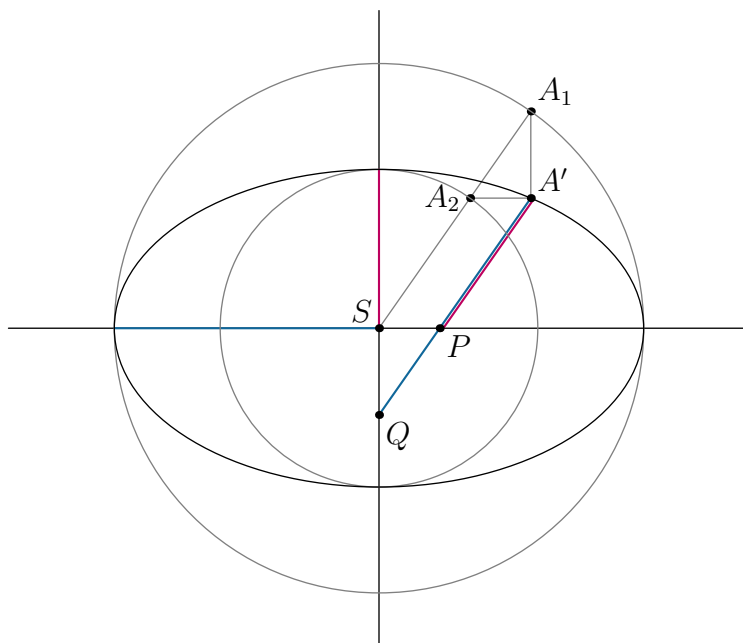
Keďže pre body A_1, A_2 platí, že $f_1(A_1) = f_2(A_2)$, máme, že $f_1^{-1}(f_2(A_2)) = A_1$. Prizríme sa bližšie afinite $f_1^{-1} \circ f_2$: stred S je pevným bodom, bod P_2 zobrazí na P_1 a Q_2 na Q_1 (viď obrázok). Keďže afinita je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov, môžeme už usúdiť, že $f_1^{-1} \circ f_2$ je rovnolahlosť so stredom S a s koeficientom a/b . Priamky prechádzajúce stredom rovnolahlosti sú samodružné, preto sú body S, A_2 a A_1 kolineárne. $\square$

Týmto sme dostali metódu na konštruovanie bodov elipsy k' :

- (1) nech p je priamka prechádzajúca stredom S ,
- (2) $A_1 = p \cap k_1, A_2 = p \cap k_2$,
- (3) A' je taký bod roviny, že $A_1A' \perp P_1S$ a $A_2A' \perp Q_1S$.

3.4. Prúžková konštrukcia elipsy, rozdielová. Znalosti, z ktorých vychádza trojuholníková konštrukcia elipsy, vieme využiť aj pri dvoch iných konštrukciách: rozdielovej a súčtovej. Pomocou nich vieme skonštruovať elipsu, ak máme dané obidve jej osi, ale dajú sa priamo aplikovať aj v situácii, ak máme danú len jednu os a jeden bod elipsy, ktorý na nej neleží.

Pre pochopenie princípu tejto konštrukcie skúmame chvíľku nasledovný obrázok.



Štvoruholníky $QA'A_1S$ a $SPA'A_2$ sú rovnobežníky, a preto $|PQ| = |A_1A_2| = a - b$ (a je dĺžka hlavnej a b je dĺžka vedľajšej poloosi). Ak poznáme poloosi elipsy, jej ďalšie body môžeme zostrojiť takto:

- (1) bodom P sa pohybujeme po hlavnej osi,
- (2) na vedľajšej poloosi nájdeme taký bod Q , že $|PQ| = a - b$,
- (3) na polpriamke $\overrightarrow{QP}$ zostrojíme bod A' elipsy tak, že $|QA'| = a$.

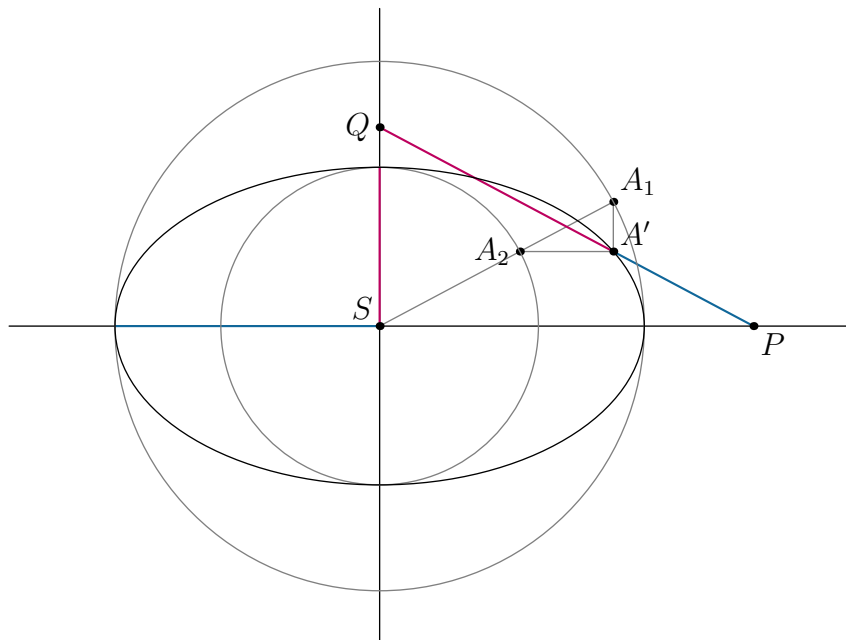
Konštrukcia sa nazýva „prúžková“, lebo ak ju chceme aplikovať, je výhodné použiť prúžok papiera s vyznačenými vzdialenostami, ako majú medzi sebou body S , A_2 a A_1 . Tiež existujú fyzické nástroje, pomocou ktorých je možné elipsu presne narysovať: v ich mechanizme je implementovaná presne táto konštrukcia.

Ak body elipsy zostrojujeme len pomocou kružidla a pravítka, je pohodlnejšou trojuholníkovú konštrukcia. Znalosť prúžkovej však môžeme využiť:

NA ZAMYSLENIE. Nech je daná hlavná os a jeden bod elipsy neležiaci na tejto osi.

- Ako skonštruujete ďalšie body elipsy?
- Ako nájdete dĺžku vedľajšej poloosi?

3.5. Průžková konstrukcia elipsy, sčtová. Znovu čítame geometrické vzťahy z obrázka:

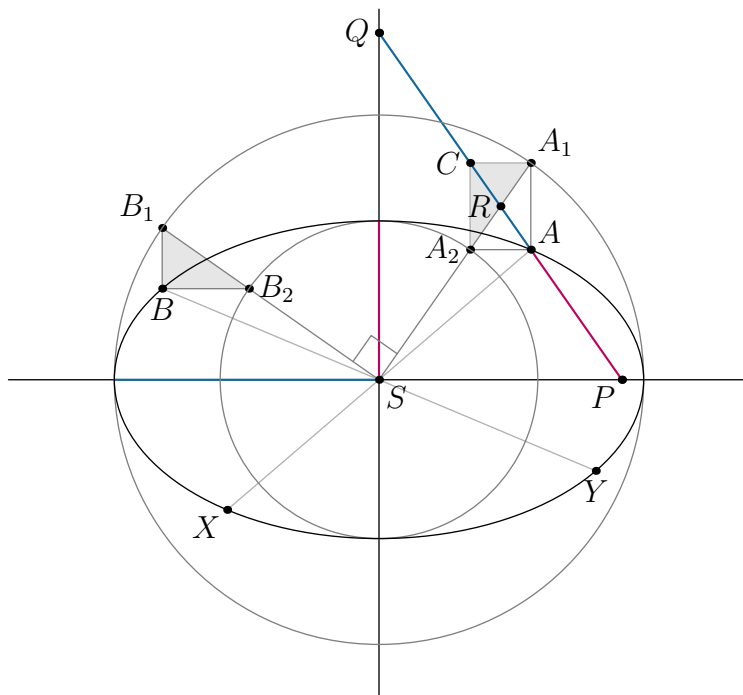


Bod P na priamke hlavnej osi a Q na priamke vedľajšej osi nech tvoria úsečku, ktorá prechádza bodom elipsy A' a zvierá s hlavnou osou rovnako veľký uhol ako $\widehat{SA_1}$. Preto lichobežník $SPA'A_2$ je rovnoramenný. To isté platí pre „lichobežník so samopriesekom“ QSA_1A' . Preto $|PA'| = b$ a $|QA'| = a$.

NA ZAMYSLENIE. Navrhните postup konštrukcie bodov elipsy pomocou průžku s dĺžkou $a + b$, na ktorom je vyznačený bod deliaci průžok v pomere $a : b$.

NA ZAMYSLENIE. Nech je daná hlavná alebo vedľajšia os a jeden bod elipsy neležiaci na tejto osi, ako s využitím sčtovej konštrukcie elipsy skonštruujete ďalšie jej body?

3.6. Rytzova konštrukcia. Často sa v geometrii ocitáme v situácii, keď máme zakresliť elipsu, kde nepoznáme žiadnu z osí, poznáme však inú dvojicu združených priemerov. Vtedy môžeme siahnuť po tejto konštrukcii, ktorou zo združených priemerov zostrojíme osi elipsy a následne môžeme aplikovať trojuholníkovú konštrukciu.



Sledujme situáciu na obrázku. Body A_1 a B_1 sú koncovými bodmi navzájom kolmých priemerov kružnice, ktorej afinným obrazom je skúmaná elipsa, teda A a B sú koncovými bodmi združených priemerov tejto elipsy. Bod C dopĺňa $\triangle A_2AA_1$ na obdĺžnik a je navyše aj obrazom bodu B v otočení o 90° . Podobne ako pri súčtovej konštrukcii elipsy z rovnoramennosti lichobežníkov usúdime, že

$$|PA| = |SA_2| = |QC| = b \quad (\text{dĺžka vedľajšej poloosi})$$

$$|PC| = |SA_1| = |QA| = a \quad (\text{dĺžka hlavnej poloosi})$$

a tak stred R obdĺžnika A_2AA_1C je aj stredom úsečky PQ a navyše $|RS| = |RP|$.

Táto analýza nám už dáva návod na konštrukciu osí elipsy: nech AX a BY sú združené priemery elipsy. Chceme nájsť hlavnú a vedľajšiu os tejto elipsy.

- (1) otočíme bod B okolo stredu elipsy o 90° do bodu C ,
- (2) nech R je stred úsečky AC ,
- (3) zostrojíme kružnicu $t: t(R, |RS|)$,
- (4) $\{P, Q\} = t \cap \overleftrightarrow{AC}$
- (5) $\overleftrightarrow{SP}, \overleftrightarrow{SQ}$ sú osi elipsy, dĺžky poloosí sú $|AP|$ a $|CP|$.

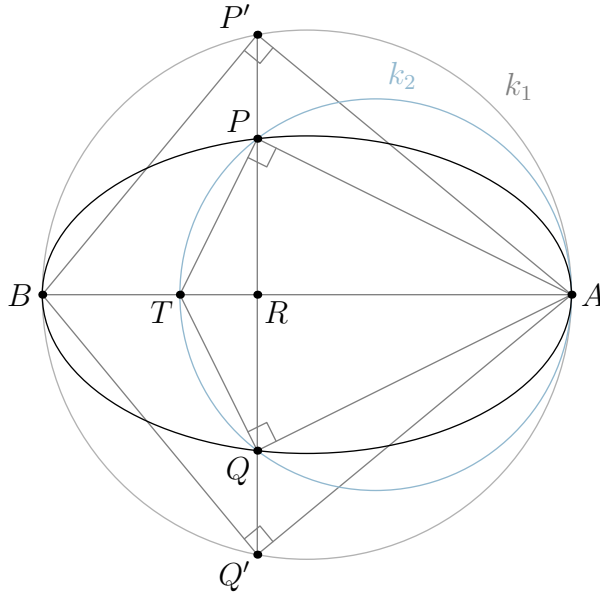
3.7. Oskulačné kružnice vo vrchoch elipsy. Pre akúkoľvek krivku, (nielen v rovine, ale aj pre priestorovú krivku) jej **oskulačná kružnica** v danom bode je taká kružnica, ktorá krivku v tomto bode najlepšie aproximuje. Formálnejšie: oskulačná kružnica krivky k v bode $P \in k$ je kružnica, ktorá

- prechádza bodom P ,
- má v bode P takú istú dotyčnicu ako krivka k ,
- má v bode P rovnakú krivosť ako krivka k .

Skúmanie dotyčníc a najmä krivosti kriviek je predmetom štúdia diferenciálnej geometrie. My si tu uvedieme špeciálnu situáciu, ktorá má veľmi veľké využitie pri črtaní elipsy, a síce konštrukciu oskulačných kružníc vo vrchoch elipsy.

TVRDENIE 3.13. *Nech a je dĺžka hlavnej a b je dĺžka vedľajšej poloosi elipsy. Potom oskulačná kružnica v hlavnom vrchole elipsy má polomer b^2/a a oskulačná kružnica vo vedľajšom vrchole elipsy má polomer a^2/b .*

Dôkaz. Odvodíme polomer oskulačnej kružnice v hlavnom vrchole, výpočet pre vedľajší vrchol prebieha presne analogicky.



Nech k_1 je kružnica dotýkajúca sa elipsy v jej hlavných vrchoch A, B . Zmenšujme túto kružnicu tak, aby sa stále dotýkala elipsy vo vrchole A , túto zmenšujúcu sa kružnicu označme k_2 . Stred k_2 tiež leží na osi AB . Nech P, Q sú priesečníky k_2 s elipsou a nech P', Q' sú priesečníky $\overleftrightarrow{PQ}$ s kružnicou k_2 . Bod T je druhý priesečník k_2 s hlavnou osou elipsy.

Ako sa priesečníky P, Q približujú k vrcholu A , kružnica k_2 stále lepšie aproximuje elipsu v tomto vrchole, v limite tak dostaneme hľadanú oskulačnú kružnicu. Vypočítajme teraz jej polomer.

V pravouhlom $\triangle TAP$ z Euklidovej vety (t.j. z podobnosti $\triangle TRP$ a $\triangle PRA$) dostaneme

$$|PR|^2 = |TR| \cdot |RA|,$$

podobne v pravouhlom $\triangle BAP'$ zas

$$|P'R|^2 = |BR| \cdot |RA|.$$

Pre bod P kdekoľvek na elipse je pomer $|PR|/|P'R|$ vždy rovný b/a . Pre oskulačnú kružnicu bod R splynie s bodom A a tak platí, že $|RB| = 2a$ a $|TR| = 2r$, priemer oskulačnej kružnice. Z tohto pozorovania a z uvedených rovností tak dostávame

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{|PR|^2}{|P'R|^2} = \frac{|TR|}{|BR|} = \frac{2r}{2a},$$

čiže

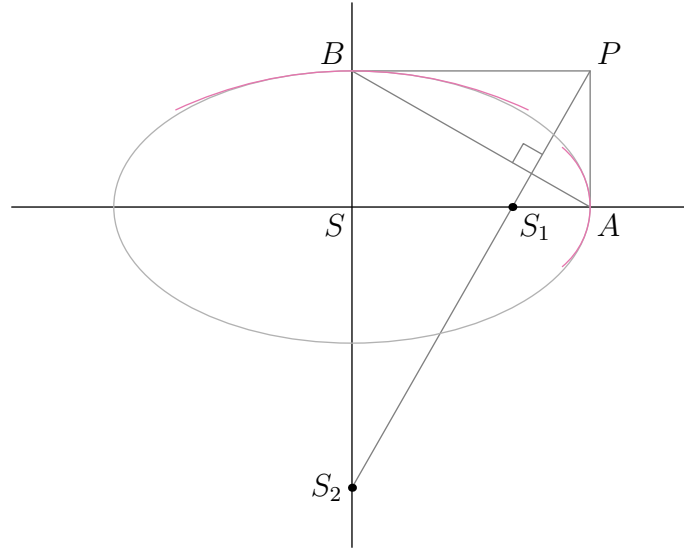
$$r = \frac{b^2}{a}.$$

□

Keďže stred oskulačnej kružnice vo vrchole elipsy sa nachádza na osi elipsy, je pre zostrojenie oskulačnej kružnice potrebné už len skonštruovať na osi bod so vzdialenosťou b^2/a či a^2/b od vrchola. Na tento účel nám poslúži jednoduchá konštrukcia:

TVRDENIE 3.14. *Nech S je stred elipsy, A nech je hlavný a B vedľajší vrchol. Nech bod P dopĺňa $\triangle SAB$ na obdĺžnik a nech p je priamka prechádzajúca bodom P a kolmá na $\overleftrightarrow{AB}$. Potom $p \cap \overleftrightarrow{AS}$ je stred oskulačnej kružnice vo vrchole A a $p \cap \overleftrightarrow{BS}$ je stred oskulačnej kružnice vo vrchole B .*

Dôkaz. Majme konštrukciu ako v tvrdení vety a stredu oskulačných kružníc označme S_1 a S_2 .



Trojuholníky $\triangle SAB$ a $\triangle APS_1$ sú podobné, preto

$$|AS_1| : |SB| = |AP| : |SA|, \quad \text{čiže} \quad |AS_1| = \frac{|SB||AP|}{|SA|} = \frac{b^2}{a}.$$

Tak isto z podobnosti $\triangle SAB$ a $\triangle BS_2P$ dostaneme

$$|BS_2| = \frac{a^2}{b}.$$

□

Ako vidieť z obrázka, oskulačné kružnice vo vrchoch elipsy sa jednak veľmi jednoducho hľadajú, a tiež túto elipsu lokálne vynikajúco aproximujú. Preto je to často využívaný nástroj pri črtaní elipsy.

POZNÁMKA. ukážka oskulačnej kružnice elipsy v inom bode ako v jej vrchole???

POZNÁMKA. elipsa parametricky? všeobecne?

Cvičenia

6. dané osi a priamka, nájsť priesečníky
7. dané osi a bod, nájsť dotyčnice k elipse cez daný bod
8. daná je jedna os a bod elipsy neležiaci na tejto osi, nájsť dotyčnicu k elipse v danom bode
- 9.

KAPITOLA 4

Osová kolineácia

Zhrňme si triedy bijektívnych transformácií roviny, s ktorými sme sa už stretli a pripomeňme si ich základné invarianty:

- *zhodnosť* zachováva dĺžky úsečiek,
- *podobnosť* zachováva pomery dĺžok úsečiek,
- *afinita* zachováva deliaci pomer; afinitu by sme tiež mohli charakterizovať ako zobrazenie, ktoré zachováva kolinearitu a pomery dĺžok úsečiek ležiacich na jednej priamke (t.j. reštrikcia afinity na priamku je podobnosť medzi priamkami).

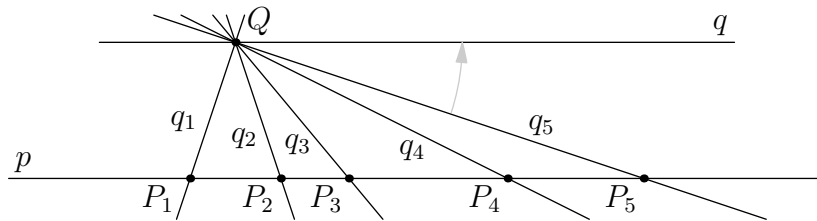
Upustíme na záver od požiadavky, že sa má zachovávať deliaci pomer. Zobrazenie, ktoré ľubovoľné navzájom rôzne kolineárne body zobrazí na navzájom rôzne kolineárne body, sa nazýva **kolineácia**.

POZNÁMKA. Kolineácie už naozaj deliaci pomer zachovať nemusia, dá sa však ukázať, že stále majú jeden invariant, a síce zachovávajú dvoj pomer štvorice bodov. (presunúť na neskôr???)

Aby sme však mohli kolineácie poriadne popísať, musíme najprv obohatiť euklidovský priestor o nové body.

1. Rozšírený euklidovský priestor

PRÍKLAD. Nech $p \subset \mathbb{E}^2$ a $Q \in \mathbb{E}^2$, $Q \notin p$. Sledujme priamky prechádzajúce bodom Q . Ak $q \parallel p$ ($q \ni Q$), tak sa priamky p a q nepretnú. Ak uvažujeme postupnosť priamok



q_i cez bod Q takú, že ich uhol s priamkou p sa blíži k 0 (teda $q_i \rightarrow q$), tak spoločný priesečník $P_i = p \cap q_i$ diverguje do nekonečna. Okrem priamky q vidíme prirodzenú bijekciu medzi bodmi P_i priamky p a priamkami zväzku so stredom Q . Doplníme priamku p o nový bod, ktorý bude reprezentovať priesečník p a q (v $\mathbb{E}^2$ neexistujúci). Tento bod nazveme **nevlastným bodom** priamky p a budeme ho označovať p_∞ .

Ak r je ľubovoľná iná priamka rovnobežná s priamkou p , znovu bude existovať bijekcia medzi bodmi priamky r a priamkami prechádzajúcimi bodom Q . Znovu to bude priamka q , ktorá bude reprezentovať nevlastný bod q_∞ priamky q .

Vidíme, že je tak zmysluplné obohatiť rovinu $\mathbb{E}^2$ o nevlastné body tak, že

$$p_\infty = r_\infty \quad \text{práve vtedy, keď} \quad p \parallel r.$$

Jeden nevlastný bod roviny tak reprezentuje celú osnovu navzájom rovnobežných priamok. Ak $\mathbb{E}_\infty^2$ označuje množinu všetkých nevlastných bodov euklidovskej roviny:

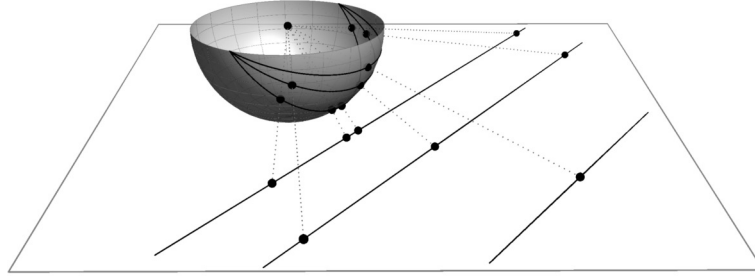
$$\mathbb{E}_\infty^2 = \{p_\infty \mid p \subset \mathbb{E}^2 \text{ je priamka}\},$$

potom **rozšírená euklidovská rovina** je množina

$$\overline{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^2 \cup \mathbb{E}_\infty^2.$$

Čo vieme povedať o množine $\mathbb{E}_\infty^2$ nevlastných bodov euklidovskej roviny?

PRÍKLAD (gnómonická projekcia). Nech sa sféra južným pólom dotýka roviny. Premietaním, ktorého stredom je stred sféry, konštruujeme bijekciu medzi bodmi $\mathbb{E}^2$ a južnou polsférou, viď obrázok. Obrazom priamky v $\mathbb{E}^2$ na polsfére je kružnicový oblúk



Gnómonická projekcia.

medzi dvoma protíhlými bodmi na rovníku. Ľahko sa presvedčíme, že rovnobežné priamky zodpovedajú oblúkom s tými istými koncovými bodmi. Dvojicu protíhlých bodov na rovníku tak môžeme stotožniť s nevlastným bodom príslušnej osnove priamok. Zaujímavým pozorovaním je, že všetky nevlastné body môžeme vidieť ako rovníkovú polkružnicu. Je preto pochopiteľné, že množina všetkých nevlastných bodov roviny tvorí priamku.

Ďalší dôvod, prečo množinu nevlastných bodov vnímať ako priamku, nám dáva požiadavka, že pre ľubovoľné dva rôzne body by mala existovať práve jedna priamka, ktorá oboma prechádza. Žiadna z priamok $\mathbb{E}^2$ po rozšírení roviny neprechádza dvoma nevlastnými bodmi, preto musíme rozšírenú rovinu obohatiť aj o novú priamku – nevlastnú.

Neskôr sa stretnete s ďalšími fenoménmi, ktoré nás presvedčajú, že množinu nevlastných bodov roviny je vhodné považovať za priamku – dokonca priamku úplne rovnocennú s ostatnými (Desarguesova veta, analytická geometria).

Rovnako, ako sme rozšírili euklidovskú priamku a euklidovskú rovinu, môžeme rozšíriť aj euklidovský priestor. Nech

$$\mathbb{E}_\infty^3 = \{p_\infty \mid p \subset \mathbb{E}^3 \text{ je ľubovoľná priamka}\},$$

je množina všetkých nevlastných bodov priestoru $\mathbb{E}^3$, potom **rozšírený euklidovský priestor** je

$$\overline{\mathbb{E}^3} = \mathbb{E}^3 \cup \mathbb{E}_\infty^3$$

Analogicky k už uvedenému, množina $\mathbb{E}_\infty^3$ všetkých nevlastných bodov priestoru tvorí rovinu. Množina α_∞ nevlastných bodov ľubovoľnej roviny α tvorí priamku pozostávajúcu z nevlastných bodov priamok ležiacich v rovine α .

V rozšírenej euklidovskej rovine každé dve priamky majú spoločný bod: v prípade, že v $\mathbb{E}^2$ boli dve priamky rovnobežné, v $\overline{\mathbb{E}^2}$ sa pretali v spoločnom nevlastnom bode. Podobne v rozšírenom priestore $\overline{\mathbb{E}^3}$ každé dve rôzne roviny majú spoločnú priesečnicu; roviny, ktoré boli v $\mathbb{E}^3$ rovnobežné, sa v $\overline{\mathbb{E}^3}$ pretnú v nevlastnej priamke. Podobne k vzájomnej polohe roviny a priamky: pokiaľ priamka v rovine neleží, má s ňou spoločný presne jeden bod, možno nevlastný.

Prirodzene a pomerne mechanicky môžeme definíciu rozšíreného euklidovského priestoru zovšeobecniť pre ľubovoľnú dimenziu.

POZNÁMKA. Rozšírený euklidovský priestor je projektívnym priestorom (ten budete systematickejšie skúmať neskôr), v ktorom sme jednu z nadrovín označili ako nevlastnú, t.j. nadrovinu nevlastných bodov. Oproti štandardnému projektívnemu priestoru máme aj metriku, táto je však definovaná len na množine vlastných bodov.

POZNÁMKA. Ak v projektívnej rovine „zrovnoprávnime“ nevlastné body s vlastnými, rovnobežnosť priamok prestáva existovať. Podobne v projektívnom priestore napríklad dve roviny už nemôžu byť rovnobežné. My napriek tomu budeme stále o rovnobežnosti hovoriť, lebo projektívny priestor budeme vnímať ako rozšírený euklidovský priestor. V ňom o každom bode vieme, či je vlastný alebo nevlastný: napríklad metrika je definovaná iba pre vlastné body priestoru. Preto pod rovnobežnosťou budeme rozumieť, že spoločný body dvoch priamok je nevlastný, analogicky ostatné prípady.

2. Stredové premietanie v priestore

Gnómonická projekcia je zúžením nasledovného zobrazenia.

Nech $\pi \subset \mathbb{E}^3$ je rovina a nech $S \in \mathbb{E}^3$ je bod taký, že $S \notin \pi$. Pre každý bod $A \in \mathbb{E}^2$, $A \neq S$, uvažujme priamku $l_A = \overleftrightarrow{SA}$ (**premietacia priamka bodu A**). Ak l_A nie je rovnobežná s rovinou π , pretne ju v nejakom bode A' . **Stredové premietanie** určené **stredom S** a **priemetňou π** je zobrazenie, ktoré bodu A priradí bod A' .

Stredové premietanie zjavne nie je definované na celom priestore $\mathbb{E}^3$: body ležiace v rovine ι takej, že $\iota \parallel \pi$, $\iota \ni S$, zobraziť nevieme. Toto sa však zmení, ak namiesto $\mathbb{E}^3$ budeme pracovať v rozšírenom priestore $\overline{\mathbb{E}^3}$. V takom prípade vieme bez problémov dodefinovať obraz ľubovoľného bodu A , ktorý je rôzny od S : v prípade, že $A \in \iota$, bude jeho obrazom A' nevlastný bod priemetne π . Tiež vieme bez problémov dodefinovať priemety ostatných nevlastných bodov priestoru $\overline{\mathbb{E}^3}$.

2.1. Obraz priamky v stredovom premietaní. Uvažujme stredové premietanie dané stredom S a priemetňou π . Nech p je priamka.

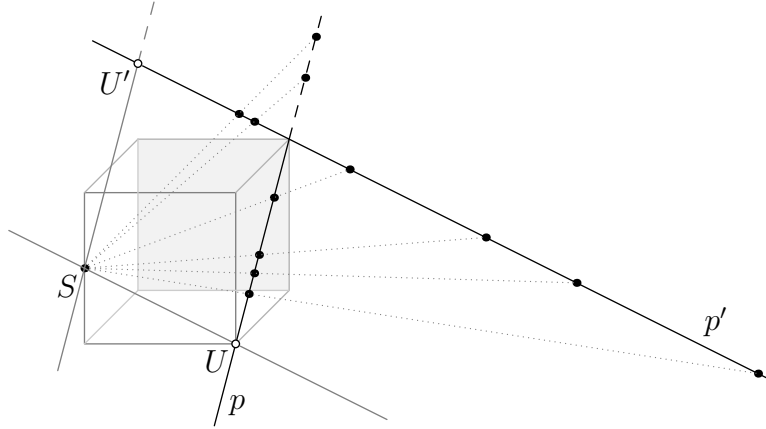
- Ak $p \ni S$, potom p je aj premietacou priamkou každého svojho bodu, teda priemetom celej priamky je bod $p \cap \pi$, ktorý je vlastný, ak $p \not\subset \iota$, a nevlastný, ak $p \subset \iota$.

Vo všeobecnejšom prípade, keď $p \not\ni S$, je premietacím útvarom (množinou tvorenou premietacími priamkami bodov) priamky p rovina prechádzajúca S a p . Priemetom priamky p je tak priamka $p' \subset \pi$. Rozanalyzujme si situáciu podrobnejšie.

- Ak $p \subset \iota$, zobrazí sa táto priamka na nevlastnú priamku priemetne: $p' = \pi_\infty$.
- Ak $p \parallel \pi$ a $p \not\subset \iota$, je zúženie zobrazenia ι na priamku p podobnosťou medzi priamkami p a p' , teda dokonca zachováva deliaci pomer bodov na tejto priamke (Tvrdenie 1.7, (ii)).
- Vo všeobecnom prípade, t.j. keď $p \not\parallel \pi$, sa deliaci pomer bodov na priamke nezachováva, zachováva sa dvojpomer (Tvrdenie 1.10). Bod $p \cap \iota$ priamky p v euklidovskom priestore priemet nemá, v rozšírenom priestore sa zobrazuje na nevlastný bod priamky p' . Zaujímavým je aj bod

$$q \cap \pi \quad \text{kde} \quad q \text{ je priamka } q \parallel p, q \ni S.$$

Ide o bod priamky p' , ktorý nemá na priamke p vzor. Ak však uvažujeme aj nevlastné body priestoru, potom $q \cap \pi \in p'$ je obrazom nevlastného bodu p_∞ priamky p , nazývame ho **úbežník priamky** p . Analogicky bod $p \cap \iota$ priamky p sa zobrazuje na bod p'_∞ a odkazujeme sa naň ako na **úbežník priamky** p' : situáciu totiž môžeme vnímať aj tak, že priamka p je obrazom priamky p' v premietaní so stredom S .



Priamka v stredovom premietaní, priemetňou je rovina zadnej steny kocky. Bod U' je úbežníkom priamky p , bod U je úbežníkom priamky p' .

2.2. Obraz roviny v stredovom premietaní. Znovu majme stredové premietanie so stredom S a priemetňou π . Skúmame, ako sa v tomto premietaní zobrazujú bodu roviny α .

- Ak $\alpha \ni S$, je obrazom roviny α priamka $\alpha \cap \pi$, nevlastná, ak $\alpha = \iota$, inak vlastná.
- Ak $\alpha \not\ni S$, $\alpha \parallel \pi$, je obrazom roviny α rovina π , presnejšie množina vlastných bodov roviny α sa bijektívne zobrazí na množinu vlastných bodov roviny π . Toto zobrazenie $\alpha \rightarrow \pi$ je podobnosťou medzi rovinami.
- Všeobecne, nech $\alpha \not\ni S$, $\alpha \not\parallel \pi$. Vtedy ak uvažujeme iba vlastné body oboch rovín, potom body roviny α ležiace aj v rovine ι nemajú obraz; pokiaľ ale pracujeme aj s nevlastnými bodmi, zobrazia sa tieto body roviny α na nevlastnú priamku priemetne π . (Mmch toto je ďalší dôvod, prečo sme sa množinu bodov rozhodli nazývať priamkou.) Analogicky v priemetni π máme priamku bodov, do ktorých sa nezobrazia vlastné body roviny α , zobrazujú sa na ňu však nevlastné body. Tento dôležitý prípad si popíšeme bližšie.

3. Kolineácia medzi rovinami

3.1. Nech $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^3$ sú rôznobežné roviny a nech $S \in \mathbb{E}^3$ je bod nepatriaci ani jednej z týchto dvoch rovín. Nech S je stred premietania a β je priemetňa. Z pozorovaní v odseku 2.1 vidíme, že reštrikcia tohto stredového premietania na rovinu β :

$$k : \alpha \rightarrow \beta$$

je kolineáciou medzi rovinami α a β . Bod S nazývame **stredom** a priesečnicu $o = \alpha \cap \beta$ **osou** kolineácie k .

Zhrňme si, že:

- k je bijektívne zobrazenie rozšírených rovín $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$,
- inverzné zobrazenie $k^{-1} : \beta \rightarrow \alpha$ je reštrikciou premietania s tým istým stredom S na priemetňu α .

Z vlastností zobrazenia k je zjavné, prečo toto zobrazenie nazývame kolineáciou *medzi rovinami*: obe roviny sú si vzhľadom na k akosi rovnocenné. Priamku v rovine β , ktorá je obrazom nevlastnej priamky roviny α v kolineácii k , voláme **úbežnicou roviny α** . Priamku v rovine α , ktorá sa zobrazí do nevlastnej priamky roviny β , zas **úbežnicou roviny β** .

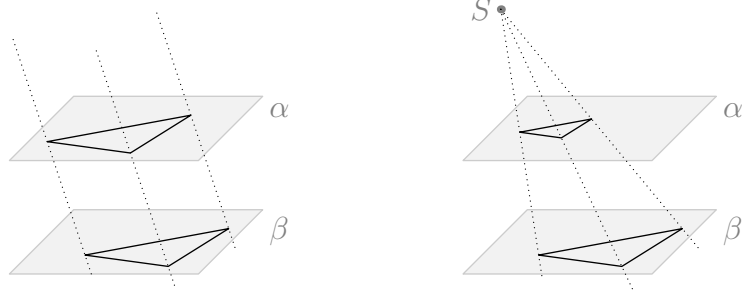
TVRDENIE 4.1. *Obe úbežnice kolineácie medzi dvoma rovinami, ktorá je reštrikciou stredového premietania, sú rovnobežné s osou tejto kolineácie.*

Dôkaz. So zavedeným označením, úbežnica roviny β je priesečnicou rovín α a ι , kde $\iota \ni S$ a $\iota \parallel \beta$, preto je táto úbežnica rovnobežná s osou o . Tak isto sa vyargumentuje rovnobežnosť druhej úbežnice. $\square$

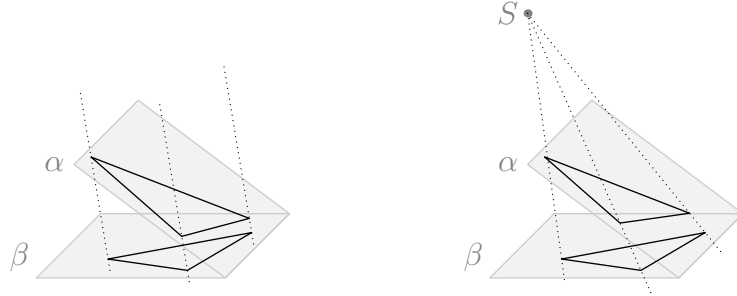
PRÍKLAD. Pohrajme sa trochu s kolineáciou medzi dvoma rovinami a s nevlastnými bodmi. Ak stred S kolineácie k posunieme do nevlastného bodu rozšíreného euklidovského priestoru (mimo nevlastných bodov rovín α_1 a α_2), stredové premietanie sa zmení na rovnobežné. Podobne os o môžeme skúsiť posunúť do nevlastnej roviny $\mathbb{E}_\infty^3$. Skúmame chvíľu tieto jednotlivé situácie. Určite v každom prípade sa kolineárne body zobrazia na kolineárne a naopak, vzorom kolineárnych bodov je tiež kolineárna množina. Pri každej situácii sa aj na chvíľu zamyslíme nad ďalšími jej invariantami, teda vlastnosťami či vzťahmi, ktoré sa zobrazením zachovávajú:

- $S \in \mathbb{E}_\infty^3$, $o \in \mathbb{E}_\infty^3$ – ide o posunutie medzi dvoma rovinami. Zobrazenie $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ zachováva vzdialenosti bodov, inými slovami: ide o izometriu;
- $o \in \mathbb{E}_\infty^3$ – rovnolahlosť medzi rovinami. Vzdialenosti bodov sa nezachovávajú, no zachovávajú sa pomery vzdialeností; zobrazenie je podobnosťou;
- $S \in \mathbb{E}_\infty^3$ – afinita medzi rovinami. Toto zobrazenie už pomery vzdialeností nezachováva, no zachováva deliaci pomer trojíc kolineárnych bodov, teda ide o afinné zobrazenie;
- ani stred ani os kolineácie neležia v nevlastnej rovine – kolineácia medzi rovinami. Toto zobrazenie už deliaci pomer nezachováva.

POZNÁMKA. V skutočnosti všetky rozobrané prípady môžeme nazvať kolineáciami, keďže rôzne kolineárne body zobrazia na rôzne kolineárne body. Prípad (d) sa pre upresnenie či rozlíšenie niekedy nazýva aj stredovou/osovou kolineáciou medzi rovinami, či perspektívnou kolineáciou.



Kolineácie medzi rovinami, ktorých priesečnicou je nevlastná priamka.



Kolineácie medzi rovinami, ktoré sú v $\mathbb{E}^3$ rôznobežné.

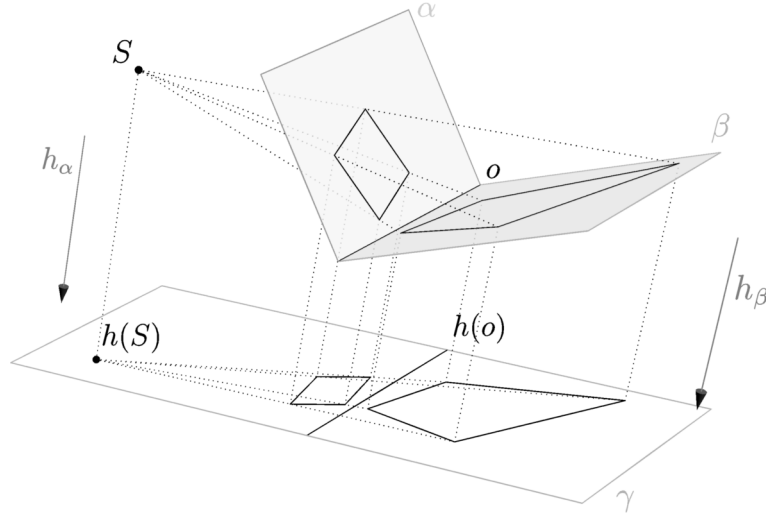
TVRDENIE 4.2. *Stredová kolineácia medzi rovinami zachováva dvojpomer štvoríc bodov.*

Dôkaz. Nech k je kolineácia medzi α a β so stredom S . Ak $A, B, C, D \in \alpha$ sú rôzne kolineárne body, obmedzíme sa na rovinu $\overleftrightarrow{ABS}$ a použijeme Tvrdenie 1.10. $\square$

3.2. Priemet kolineácie medzi rovinami. Pokračujme s popísanou kolineáciou k medzi rôznobežnými rovinami α a β v priestore $\mathbb{E}^3$ so stredom $S \in \mathbb{E}^3$ a osou $o = \alpha \cap \beta$. Nech $h : \mathbb{E}^3 \rightarrow \gamma$ je rovnobežné premietanie zvolené tak, aby $h(\alpha) = h(\beta) = \gamma$. Teda reštrikcie projekcie h :

$$\begin{aligned} h_\alpha &= h|_\alpha \\ h_\beta &= h|_\beta \end{aligned}$$

sú bijekciami medzi rovinami α a γ resp. β a γ . Kolineácia k je bijekciou $\overline{\alpha} \rightarrow \overline{\beta}$ v rozšírenej euklidovskej rovine.



Všetky doteraz uvažované projekcie h_α , h_β , k , aj k nim inverzné zobrazenia zachovávajú kolineárnosť bodov. Preto aj zložené zobrazenie

$$\kappa = h_\beta \circ k \circ h_\alpha^{-1} : \bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}$$

je kolineáciou.

TVRDENIE-DEFINÍCIA 4.3.

- (i) *Obraz priesečnice $\alpha \cap \beta$ (osi kolineácie k) v premietaní h je silne samodružnou priamkou kolineácie κ .*
- (ii) *Obraz bodu S (stredu kolineácie k) je samodružný bod kolineácie κ a navyše všetky priamky roviny γ prechádzajúce týmto bodom sú samodružnými priamkami zobrazenia κ – taký bod budeme nazývať **silne samodružným bodom**.*

Dôkaz. (i) Tvrdenie vyplýva z faktu, že o je spoločnou priamkou rovín α a β , teda každý bod priamky o sa v kolineácii k zobrazí sám na seba (pred zobrazením chápaný ako bod roviny α a po zobrazení zas ako bod roviny β) a pre body $X \in o$ platí $h_\alpha(X) = h_\beta(X)$.

(ii) obrazok???

Nech $S' = h(S) \in \gamma$. Bod S' je v premietaní h obrazom nielen bodu S , ale aj ostatných bodov priamky l_S (premietacia priamka bodu S), špeciálne bodov $l_S \cap \alpha$ a $l_S \cap \beta$. Priamka l_S je zároveň premietacu priamkou bodu $l_S \cap \alpha$ v kolineácii k . Máme tak

$$\kappa(S') = h_\beta \circ k \circ h_\alpha^{-1}(S') = h_\beta \circ k(l_S \cap \alpha) = h_\beta(l_S \cap \beta) = S'.$$

Analogicky ak $p \subset \gamma$ je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom S' , je premietacia rovina prisúchajúca priamke p tá istá pre zobrazenia h_α, h_β, k . z čoho je zjavné, že p je samodružnou priamkou kolineácie κ . $\square$

Priamku $o' \subset \gamma = h(o)$ nazývame **osou** a bod $S' \in \gamma = h(S)$ **stredom** kolineácie κ . Ak $S' \in o$, nazývame kolineáciu κ **eláciou**.

Obrazy úbežníc kolineácie k nazývame **úbežnicami** kolineácie κ . Z Tvrdenia 4.1 a z faktu, že h je rovnobežné premietanie, vidíme, že úbežnice kolineácie κ sú rovnobežné s osou tejto kolineácie.

Pohľad na rez ihlanovej/kužeľovej plochy cez kolineáciu κ ???

4. Kolineácie v rovine

Uvažujme rovinu $\mathbb{E}^2$ a jej projektívne rozšírenie $\overline{\mathbb{E}^2}$. Nech κ je ľubovoľná kolineáciou v tejto rovine, t.j. zobrazenie, ktoré rôzne kolineárne body zobrazí na rôzne kolineárne body.

Úbežnica kolineácie κ je priamka, ktorá je vzorom alebo obrazom nevlastnej priamky $\mathbb{E}_\infty^2$.

TVRDENIE-DEFINÍCIA 4.4. *Nech κ je kolineácia v rovine rôzna od identity. Potom*

- (a) κ má najviac jednu silne samodružnú priamku; ak takáto priamka existuje, nazývame kolineáciu **osovou** a silne samodružnú priamku nazývame jej **osou**,
- (b) κ má najviac jeden silne samodružný bod; ak takýto bod existuje, nazývame kolineáciu **stredovou** a silne samodružný bod nazývame jej **stredom**.

Dôkaz. (a) Nech p, q sú silne samodružné a nech A je ľubovoľný bod neležiaci na žiadnej z nich. Vedme bodom A dve rôzne priamky r_1 a r_2 . Body $r_1 \cap p$ a $r_1 \cap q$ sú pevné, preto je priamka r_1 samodružná, podobne pre r_2 . Keďže $A \in r_1$ aj $A \in r_2$, je A pevný bod kolineácie, teda kolineácia by musela byť identitou.

(b) Nech S, T sú silno samodružné body. Nech A je ľubovoľný bod rôznych neležiaci na $\overleftrightarrow{ST}$. Priamky $\overleftrightarrow{AS}$ a $\overleftrightarrow{AT}$ sú podľa predpokladu samodružné, preto A je pevný bod. V fakt, že ide o kolineáciu, potom tvrdenie platí aj pre body na $\overleftrightarrow{ST}$. $\square$

LEMA 4.5. *Nech κ je osová kolineácia roviny a nech bod A neleží na osi kolineácie κ .*

- (i) Ak A je samodružný, potom je silne samodružný.
- (ii) Ak A nie je samodružný, potom je samodružnou priamka $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$.

Dôkaz. (i) Každá priamka p prechádzajúca bodom A má dva pevné body: A aj $p \cap o$, a preto je samodružnou. Teda A je silne samodružný bod.

- (ii) Ak $A^o = \overleftrightarrow{A\kappa(A)} \cap o$, tak $\kappa(\overleftrightarrow{A^o A}) = \overleftrightarrow{A^o \kappa(A)} = \overleftrightarrow{A^o A}$. $\square$

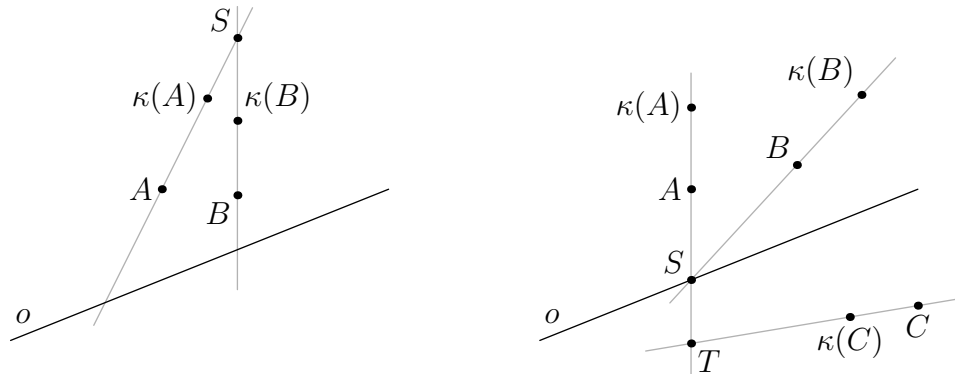
V predchádzajúcom odseku (3.2 Priemet kolineácie medzi rovinami) sme za os resp. stred kolineácie považovali vždy vlastnú priamku resp. vlastný bod. Naozaj je práve toto situácia, s ktorou sa v praxi deskriptívnej geometrie stretávame. V skutočnosti ale nič nebráni vziať napríklad ako stred kolineácie niektorý nevlastný bod. Keď toto pripustíme, môžeme ukázať nasledovnú vetu.

VETA 4.6.

- (i) *Osová kolineácia roviny je aj stredovou kolineáciou.*
- (ii) *Stredová kolineácia roviny je aj osovou kolineáciou.*

Dôkaz. (i) Nech o je os kolineácie κ . Nájdeme stred kolineácie κ .

Nech A je bod neležiaci na osi. Ak A je samodružný, tak je podľa Lemy 4.5(i) už stredom kolineácie. Nech teda A nie je samodružný bod. Nech B je ďalší bod neležiaci ani na osi o ani na priamke $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$. Ak B nie je samodružný (inak by bol už stredom kolineácie), máme samodružné priamky $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ a $\overleftrightarrow{B\kappa(B)}$ (Lema 4.5(ii)). Potom bod $S = \overleftrightarrow{A\kappa(A)} \cap \overleftrightarrow{B\kappa(B)}$ je samodružný.



Hľadanie stredu osovej kolineácie, vľavo: stred je mimo osi, vpravo: na osi

Ak S neleží na osi o , je silne samodružným (Lema 4.5(i)), a teda stredom kolineácie κ .

Nech $S \in o$. Nech C je bod neležiaci na žiadnej z priamok o , $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ a $\overleftrightarrow{B\kappa(B)}$. Predpokladajme, že samodružná priamka $\overleftrightarrow{C\kappa(C)}$ neprechádza bodom S . Potom $T = \overleftrightarrow{C\kappa(C)} \cap \overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ by bol samodružný bod neležiaci na osi o , išlo by teda o silne samodružný bod. Potom aj priamka $\overleftrightarrow{BT}$ by bola samodružná, a keďže $\overleftrightarrow{BT} = \overleftrightarrow{B\kappa(B)}$, priamky $\overleftrightarrow{A\kappa(A)}$ a $\overleftrightarrow{B\kappa(B)}$ by sa pretali v dvoch rôznych bodoch S a T .

(ii) Pri konštrukcii dôkazu sa môžeme oprieť o princíp duality, veľmi často využívaný v projektívnej rovine. Body a priamky sú navzájom duálnymi konceptami: tak ako ľubovoľné dva rôzne body jednoznačne určujú priamku, tak aj dve rôzne priamky jednoznačne určujú bod – ich priesečník. Podobne ako každá priamka obsahuje nekonečne veľa bodov, na druhej strane každým bodom prechádza nekonečne veľa priamok. Z dôkazu v časti (i) skonštruujeme dôkaz tvrdenia (ii) tak, že slovo „priamka“ nahradíme slovom „bod“ a naopak, slová „ležať na“ nahradíme spojením „prechádzať cez“ atď. Najprv sformulujeme a dokážeme duálne tvrdenie k Leme 4.5 a potom dokážeme samotné tvrdenie (ii) tejto vety. $\square$

NA ZAMYSLENIE. Na precvičenie dokazovania sa skúste zamyslieť, ako by ste vyargumentovali, že

- každá slabo samodružná priamka osovej kolineácie prechádza stredom tejto kolineácie,
- každý slabo samodružný bod osovej kolineácie leží na osi tejto kolineácie.

Zhrňme si naše poznatky: nech κ je osová kolineácia. Potom

- κ má jediná silne samodružnú priamku, ktorú voláme osou kolineácie,
- κ má presne jeden silne samodružný bod, ktorý voláme stredom kolineácie,
- všetky slabo samodružné priamky prechádzajú stredom kolineácie,
- všetky slabo samodružné body ležia na osi kolineácie.

NA ZAMYSLENIE. Zamyslite sa nad zobrazeniami roviny, ktoré už poznáte, uchopte ich ako kolineácie:

- osová súmernosť,
- osová afinita.

- (c) otočenie,
- (d) rovnolahlosť,
- (e) posunutie.

Ktoré z nich sú osovými/stredovými kolineáciami? Je niektoré z nich eláciou?

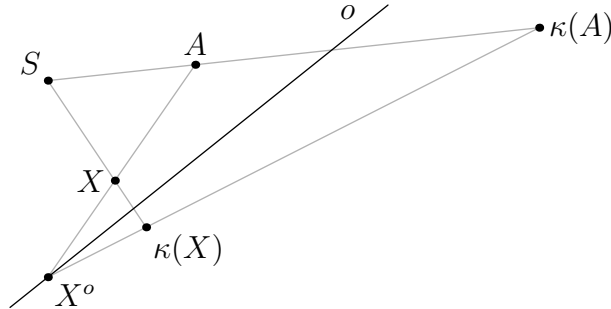
4.1. Osová (stredová) kolineácia v praxi deskriptívnej geometrie. V tejto časti bude kolineácia κ osovou (t.j. aj stredovou) kolineáciou, pričom jej stred je vlastný bod a tiež os bude vždy vlastnou priamkou. Pripomínáme, že pod rovnobežnosťou priamok v rozšírenej (t.j. projektívnej) rovine rozumieme, že spoločný bod priamok je nevlastný bod.

TVRDENIE 4.7. *Osová kolineácia κ je jednoznačne určená svojím stredom S , osou o a obrazom jedného bodu A , pričom body S , A a $\kappa(A)$ sú navzájom rôzne kolineárne body.*

Dôkaz. Nech X je ľubovoľný bod neležiaci na priamke $\overleftrightarrow{AS}$. Ak X neleží na osi o (a teda nie je samodružný), je jeho obraz v kolineácii κ určený nasledovne:

- (1) nech $X^o = o \cap \overleftrightarrow{XA}$ ($X^o \kappa(A)$ je obrazom $\overleftrightarrow{XA}$),
- (2) potom $\kappa(X) = \overleftrightarrow{X^o \kappa(A)} \cap \overleftrightarrow{SX}$.

Bod X^o alebo bod $\kappa(X)$ môže byť nevlastný.



Ak $X \in \overleftrightarrow{AS}$, zostrojíme si najprv obraz ľubovoľného nie pevného bodu neležiaceho na $\overleftrightarrow{AS}$ a pomocou neho obraz bodu A . □

TVRDENIE 4.8. *Nech κ je osová kolineácia. Potom úbežnice kolineácie κ sú rovnobežné s osou.*

Dôkaz. Pre ľubovoľnú priamku p , ktorá nie je samodružnou, platí, že priesečník osi kolineácie a priamky p je pevný bod, teda je aj priesečníkom p a $\kappa(p)$.

Nevlastná priamka $\mathbb{E}_\infty^2$ má s osou spoločný nevlastný bod osi, preto aj jej obraz $\kappa(\mathbb{E}_\infty^2)$ bude mať s osou tento spoločný bod, t.j. priamka $\kappa(\mathbb{E}_\infty^2)$ je s osou rovnobežná.

To isté platí pre vzor nevlastnej priamky, lebo je zároveň obrazom nevlastnej priamky v kolineácii κ^{-1} . □

Vidíme, že ak kolineácia κ má silne samodružnú priamku, má nutne aj viacero ďalších vlastností, ktoré má aj kolineácia, ktorú sme dostali priemetom stredového premietania roviny α na rovinu β : existuje aj stred kolineácie a úbežnice kolineácie sú rovnobežné s jej osou. Preto už asi nasledovné tvrdenie nie je veľmi prekvapivé:

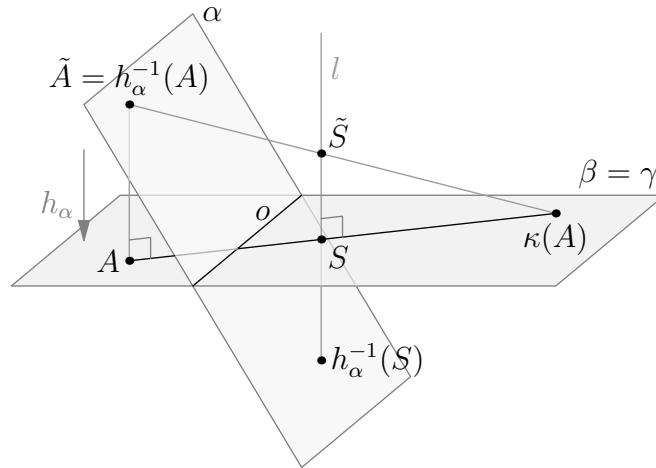
TVRDENIE 4.9. *Každá osová kolineácia, ktorej os aj stred sú vlastné, je kolmým priemetom nejakej stredovej kolineácie medzi dvoma rovinami.*

Dôkaz. Nech κ je skúmaná osová kolineácia. Nech S je jej stred a o je jej os. Nech bod A sa zobrazí do bodu $\kappa(A)$. Štvorica $S, o, A, \kappa(A)$ kolineáciu κ jednoznačne určuje.

Vnorne rovinu, ktorú κ transformuje, do trojrozmerného priestoru a označme ju (v súlade s označením použitým v časti 3.2 Priemet kolineácie medzi rovinami) ako γ . Označenia určujúcich prvkov kolineácie ponechajme bezo zmeny.

Ďalej nech β je rovina totožná s rovinou γ a nech α je rovina rôznobežná s β tak, aby priesečnicou $\alpha \cap \gamma$ bola os o . Zároveň nech α nie je kolmá na γ . Smer rovnobežného premietania nech je kolmý na rovinu γ .

Označme priemet bodu $A \in \gamma$ do roviny α (vo zvolenom smere, t.j. kolmo na γ) ako $\tilde{A}$. Nech l je priamka prechádzajúca bodom $S \in \gamma$ kolmá na γ . Keďže $A, \kappa(A), \tilde{A}$ aj S ležia v jednej rovine, ktorá je kolmá na γ , leží v tejto rovine aj priamka l , a teda je s priamkou $\tilde{A}\kappa(A)$ rôznobežná; označme ich priesečník ako $\tilde{S}$.



Nech k je stredové premietanie medzi rovinami $\alpha \rightarrow \beta$ so stredom $\tilde{S}$. Nech h je kolmé premietanie do roviny γ . Ako v časti 3.2 nech h_α resp. h_β je reštrikcia h na α resp. β a nech

$$\tilde{\kappa} = h_\beta \circ k \circ h_\alpha^{-1} = k \circ h_\alpha^{-1}.$$

Keďže κ je zložením kolineácií, je tiež kolineáciou. Lahko sa presvedčíme, že

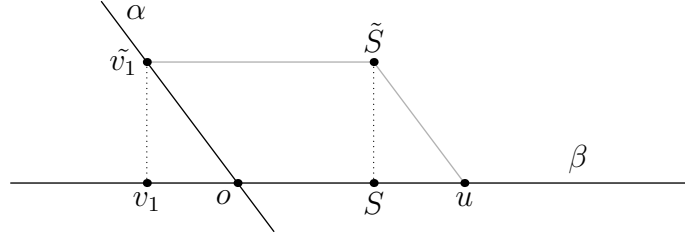
- o je priamkou samodružných bodov kolineácie $\tilde{\kappa}$, lebo všetky body priamky o sú pevnými v zobrazení h_α aj v zobrazení k ;
- každá priamka roviny γ prechádzajúca bodom S je samodružnou v kolineácii $\tilde{\kappa}$, lebo jej premietacia rovina v zobrazení h_α^{-1} splýva s premietacou rovinou priamky $h_\alpha^{-1}(l) \subset \alpha$ v zobrazení k ;
- $\tilde{\kappa}(A) = \kappa(A)$.

Teda $\tilde{\kappa} = \kappa$. □

DÔSLEDOK 1. *Nech S je stred a o os kolineácie. Nech v_1 je obraz nevlastnej priamky u tejto kolineácii a nech u je vzor nevlastnej priamky. Potom orientovaná vzdialenosť stredu S od úbežnice u sa rovná orientovanej vzdialenosti úbežnice v_1 od osi o .*

Dôkaz. Rozložíme kolineáciu κ ako v dôkaze Tvrdenia: $\kappa = k \circ h_\alpha^{-1}$, kde h_α je kolmé premietanie $\alpha \rightarrow \gamma$ a k je premietanie $\alpha \rightarrow \beta = \gamma$ so stredom (S) . Označme ešte $\tilde{v}_1 = h_\alpha^{-1}(v_1)$.

Priemet všetkých týchto prvkov kolmo do roviny kolmej na os o je na obrázku.



Vidíme, že $ou\tilde{S}\tilde{v}_1$ je rovnobežník a v_1, S sú kolmé priemety $\tilde{v}_1$ a $\tilde{S}$ na priamku $\overleftrightarrow{ou}$. Odtiaľ vyplýva dokazovaná vlastnosť. $\square$

DÔSLEDOK 2. Každá osová kolineácia zachováva dvojpomer štvorice bodov.

Dôkaz. Okrem Tvrdenia 4.9 viď aj Tvrdenie 4.2. $\square$

5. Zhrnutie

Štúdium kolineácií projektívnej roviny je veľmi zaujímavá a obsiahla oblasť geometrie. Zďaleka sme túto triedu transformácií nepokryli tak systematicky ako predchádzajúce. Urobíme si preto ešte zhrnutie, aby sme si ujasnili, čo vieme a čo zatiaľ možno iba tušíme. Venovať sa téme budete ešte zvlášť na predmete „Projektívna geometria“.

Vychádzame z definície, že kolineácia je zobrazenie, ktoré trojicu navzájom rôznych kolineárnych bodov zobrazí na trojicu navzájom rôznych kolineárnych bodov.

- Kolineácia rovny je bijektívne zobrazenie roviny do seba.
- Kolineácia zachováva dvojpomer štvorice bodov (pre osovú kolineáciu Dôsledok 2 Tvrdenia 4.9).
- Osová kolineácia je aj stredovou kolineáciou a naopak (Veta 4.6).
- Každá osová kolineácia κ je jednoznačne určená štvoricou $S, o, A, \kappa(A)$, kde $S, A, \kappa(A)$ sú tri navzájom rôzne kolineárne body (Dôsledok 1 Tvrdenia 4.9).
- Tiež naopak, pre každú štvoricu $S, o, A, \kappa(A)$, kde $S, A, \kappa(A) \notin o$ a $S, A, \kappa(A)$ sú tri navzájom rôzne kolineárne body, existuje príslušná kolineácia.

Cvičenia

10. Que? dačo, že stred sa zjavne nezobrazí na stred, napr., skrátka, že kolineácia nemusí zachovať deliaci pomer.

11. Nech κ je osová kolineácia. Potom každá slabo samodružná priamka prechádza silne samodružným bodom. Inak: Všetky slabo samodružné priamky prechádzajú spoločným bodom, ktorý je silne samodružný. Dokázať.

12. Sformulovať a dokázať duálne tvrdenie k Leme 4.5

13. Dokázať Vetu 4.6 (ii).

KAPITOLA 5

Kuželosečky

1. Elipsa ako afinný obraz kružnice

1.1. Kružnica. Je daná stredom $S \in \mathbb{E}^2$ a polomerom $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ako množina bodov, ktorých vzdialenosť od stredu S je r :

$$k = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XS| = r\}.$$

Z tejto definície potom už ľahko odvodíme rovnicu kružnice. V špeciálnom prípade, ak $S = (0, 0)$, tak bod $X = (x, y)$ leží na kružnici práve vtedy, keď $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. Túto rovnosť štandardne upravujeme tak, aby sme sa vyhli odmocnine. Dostávame tak **implicitnú rovnicu kružnice**, t.j. čosi ako všeobecnú rovnicu:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pri hľadaní rovnice pre kružnicu so stredom v ľubovoľnom bode $S = (m, n)$ môžeme uvažovať dvoma spôsobmi:

- (a) Priamo z definície kružnice musí pre bod (x, y) kružnice platiť, že

$$\begin{aligned} |(x, y)(m, n)| &= r \\ \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} &= r \\ (x-m)^2 + (y-n)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Ak to nie je pre nejaké následné výpočty potrebné, rovnicu pre prehľadnosť nechávame v tomto tvare, neroznásobujeme.

- (b) Rovnicu kružnice odvodíme úvahami o jej posunutí tak, aby stred kružnice splynul so začiatkom súradnicovej sústavy. Posúvať teda budeme o vektor $(-m, -n)$, čím sa bod so súradnicami (x, y) zobrazí do bodu so súradnicami $(x-m, y-n)$. Uvažujeme napríklad takto: bod (x, y) leží na kružnici so stredom $S = (m, n)$ a polomerom r práve vtedy, keď posunutý bod $(x-m, y-n)$ leží na kružnici s tým istým polomerom a so stredom v začiatku súradníc, t.j. keď

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

PRÍKLAD. Akú kružnicu popisuje rovnica

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 4y + 12 = 0?$$

1.2. Elipsa. V kapitole o osovej afinite sme si predstavili elipsu najprv ako obraz kružnice v kolmej osovej afinite. Analyticky: nech k má stred v začiatku súradníc a polomer a , teda jej rovnica je

$$(2) \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Túto rovnicu môžeme tiež zapísať

$$(3) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1,$$

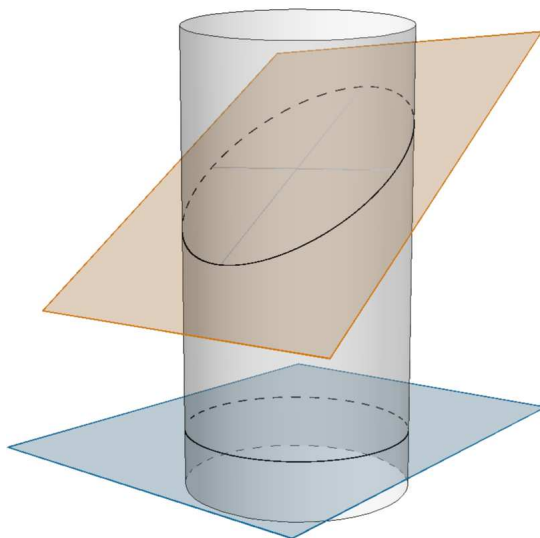
čo sa spolu dá čítať: „to, že bod (x, y) spĺňa našu rovnicu (2), znamená, že bod $(x/a, y/a)$, leží na jednotkovej kružnici, viď (3)“.

Nech osou afinity je x -os a nech táto afinita zobrazuje bod $(0, a)$ do bodu $(0, b)$, ($b > 0$). Vieme, že obrazom kružnice s polomerom a bude elipsa s poloosami a a b . Navyše z postupu jej zostrojenia rýchlo zistíme, že rovnicou tejto elipsy je

$$(4) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Z definície elipsy ako obrazu kružnice v kolmej osovej afinite sme odvodili mnohé užitočné vlastnosti elipsy. Následne sme si zdôvodnili, že elipsu s týmito vlastnosťami dostaneme ako obraz kružnice v ľubovoľnej afinite (Veta 3.11). Preto je obrazom elipsy v afinite znovu elipsa (kružnicu chápme ako špeciálny prípad elipsy).

Vráťme sa k obrazu kružnice v kolmej afinite. Na takúto afinitu môžeme nahliadnuť ako na rovnobežné premietanie medzi rovinami a obraz kružnice môžeme vidieť ako rez rotačnej valcovej plochy rovinou.



OTÁZKA 1. Uvažujte rotačnú valcovú plochu. Aké útvary môžu vzniknúť ako rezy tejto plochy rovinou?

NA ZAMYSLENIE. Majme rotačnú valcovú plochu $\mathcal{V}$ s polomerom 1, t.j. polomer kružnice k ležiacej v rovine α kolmej na os rotácie valcovej plochy je 1. Nech rovina β zviera s rovinou α uhol φ ($0 < \varphi < \pi/2$). Aké sú dĺžky poloosí elipsy $\mathcal{V} \cap \beta$?

1.3. QD veta pre valcovú plochu: metrická definícia elipsy.

OTÁZKA 2. Nech $\mathcal{S}$ je sféra (guľová plocha) a nech B je vonkajší bod sféry. Nech t je priamka prechádzajúca bodom B a dotýkajúca sa sféry $\mathcal{S}$ v bode T . Zdôvodnite, prečo dĺžka $|BT|$ nezávisí od voľby dotýčnice t .

VETA 5.1. [Quetelet-Dandelin, QD] Nech $\mathcal{V}$ je rotačná valcová plocha a nech β je rovina taká, že $\beta \cap \mathcal{V}$ je elipsa, ktorú označíme $\mathcal{E}$.

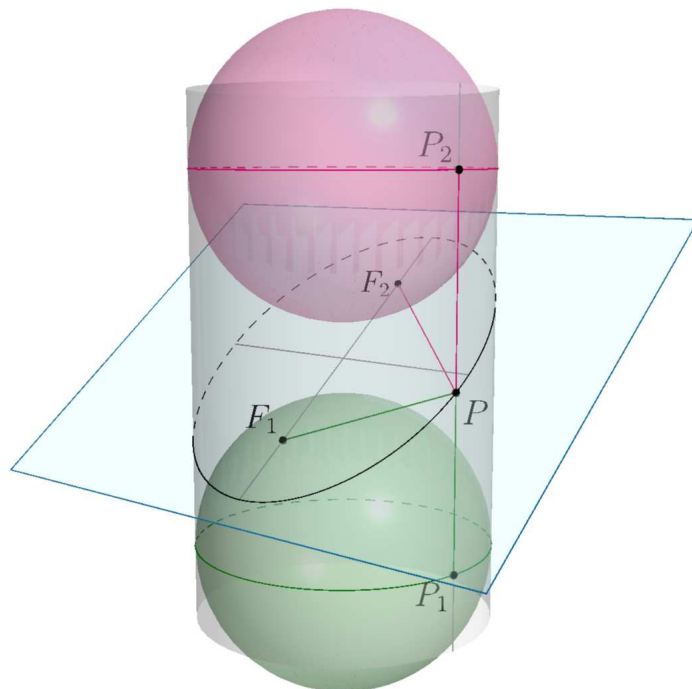
Nech $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ sú sféry vpísané do $\mathcal{V}$ a dotýkajúce sa roviny β z navzájom opačných strán od β (tzv. **Dandelinove sféry**), body dotyku nech sú F_1 a F_2 .

Potom súčet vzdialeností

$$|PF_1| + |PF_2|$$

je konštantný pre všetky $P \in \mathcal{E}$.

Dôkaz.



Nech P je ľubovoľný bod elipsy $\mathcal{E} = \beta \cap \mathcal{V}$. Keďže rovina β sa dotýka sféry $\mathcal{S}_1$ v bode F_1 , je priamka $\overrightarrow{F_1P}$ dotyčnicou sféry $\mathcal{S}_1$ v F_1 .

Uvažujme priamku na valcovej ploche prechádzajúcu bodom P (tzv. **tvoriaca priamka** valcovej plochy). Táto priamka je tiež dotyčnicou sféry $\mathcal{S}_1$, bod dotyku P_1 leží na kružnici, pozdĺž ktorej sa $\mathcal{S}_1$ dotýka valcovej plochy. Preto

$$|PF_1| = |PP_1|$$

(viď Otázka 2).

Analogicky skonštruujeme bod P_2 na dotykovej kružnici sféry $\mathcal{S}_2$ a valcovej plochy tak, že

$$|PF_2| = |PP_2|.$$

Preto

$$|F_1P| + |PF_2| = |P_1P| + |PP_2| = |P_1P_2|,$$

pričom vzdialenosť bodov P_1 a P_2 nezávisí od voľby bodu $P \in \mathcal{E}$. $\square$

Vlastnosť elipsy odhalená QD-vetou pre rotačnú valcovú plochu umožňuje alternatívnu definíciu elipsy.

Elipsa je tak daná dvoma rôznymi bodmi F_1, F_2 (**ohniskami**) v rovine a kladným reálnym číslom a , pre ktoré navyše musí platiť $2a > |F_1, F_2|$. Sama elipsa je potom

definovaná ako množina takých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od ohnísk je konštantná. Presnejšie:

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF_1| + |XF_2| = 2a\}.$$

Pre odvodenie implicitnej rovnice elipsy (t.j. rovnice, ktorú spĺňajú presne body elipsy) vložíme vhodným spôsobom situáciu do súradnicovej sústavy. Označme

$$e = |F_1 F_2|/2,$$

číslo e je **(lineárna) excentricita** elipsy. Lahko nahliadneme, že dané číslo a je dĺžkou hlavnej poloosi a že medzi dĺžkami poloosí a lineárnou excentricitou je vzťah

$$(5) \quad a^2 = b^2 + e^2.$$

Zvolíme teraz súradnice tak, že stred elipsy je v začiatku súradníc a ohniská ležia na x -osi, teda

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0)$$

a konečne môžeme pristúpiť k odvodeniu rovnice elipsy. Bod $X = (x, y)$ leží na elipse práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} |(x, y)(-e, 0)| + |(x, y)(e, 0)| &= 2a \\ \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Trpezlivými a pozornými úpravami (dvakrát treba rovnicu umocniť, využiť vzťah (5)) sa nakoniec dopracujeme ku kvadratickej rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ktorú nazývame **kanonická rovnica** elipsy.

POZNÁMKA. Túto istú rovnicu sme dostali, aj keď sme elipsu analyticky popisovali ako obraz kružnice v kolmej afinite, viď (4). Máme tak popri QD-vete vlastne druhý dôkaz tvrdenia, že elipsa definovaná ako afinný obraz kružnice je taký istý útvar ako množina bodov s konštantným súčtom vzdialeností od daných dvoch ohnísk.

Okrem lineárnej excentricity e priradujeme elipse aj **numerickú excentricitu** ϵ :

$$\epsilon = \frac{e}{a}.$$

Numerická excentricita popisuje tvar elipsy, presnejšie, ako veľmi sa elipsa líši od kružnice. Na rozdiel od lineárnej sa numerická excentricita zachováva pri škálovaní.

NA ZAMYSLENIE. Aké hodnoty môže nadobúdať numerická excentricita elipsy?

Vráťme sa späť k všeobecnej rovnici elipsy. Ak by sme chceli zapísať rovnicu elipsy so stredom v bode $S = (m, n)$, hlavnou osou rovnobežnou s x -osou, na základe úvah vykonaných pri kružnici len urobíme posunutie a dostaneme

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

PRÍKLAD. Akú elipsu (kde má stred, vrcholy, akú má excentricitu) popisuje rovnica

- $2x^2 + 5y^2 - 10 = 0$,
- $4x^2 + 4x + y^2 - 6y + 6 = 0$,
- $5x^2 + 6x + 5y^2 - 8y + 10 = 0$?

2. Kuželosečky sú rezmi kuželovej plochy (QD-vety)

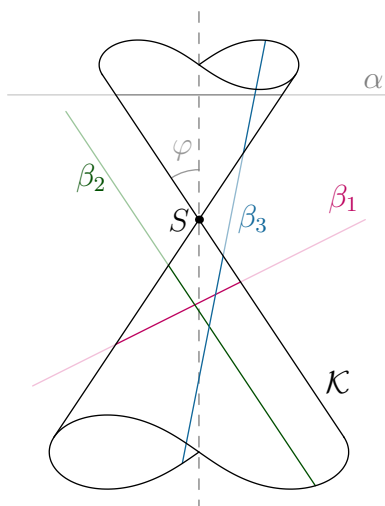
Majte teraz rotačnú kuželovú plochu $\mathcal{K}$. Rovina α nech je kolmá na os rotácie a neobsahuje vrchol kuželovej plochy, teda $k = \alpha \cap \mathcal{K}$ je kružnica.

NA ZAMYSLENIE. Aký útvar môžeme dostať ako prienik roviny a kuželovej plochy, ak rovina prechádza vrcholom tejto plochy?

Nech β je ľubovoľná rovina neprechádzajúca vrcholom S kuželovej plochy $\mathcal{K}$.

Topologicky rezom rotačnej kuželovej plochy rovinou môžeme dostať tri rôzne krivky, v závislosti od uhla, ktorý s osou rotácie plochy $\mathcal{K}$ zvierá na jednej strane rovina β (označme tento uhol θ) a na druhej strane tvoriace priamky kuželovej plochy (uhol φ). Môžeme dostať

- súvislú ohraničenú krivku, ak $\theta > \varphi$
- súvislú neohraničenú krivku, ak $\theta = \varphi$, alebo
- nesúvislú neohraničenú krivku pozostávajúcu z dvoch komponent, ak $\theta < \varphi$.



Je užitočné mať na pamäti, že hľadať rez plochy $\mathcal{K}$ rovinou β je to isté ako hľadať obraz kružnice k v stredovom premietaní so stredom S a priemetňou β . Krivka $\mathcal{K} \cap \beta$ je tak obrazom kružnice $k = \mathcal{K} \cap \alpha$ v osovej kolineácii medzi rovinami α a β .

OTÁZKA 3.

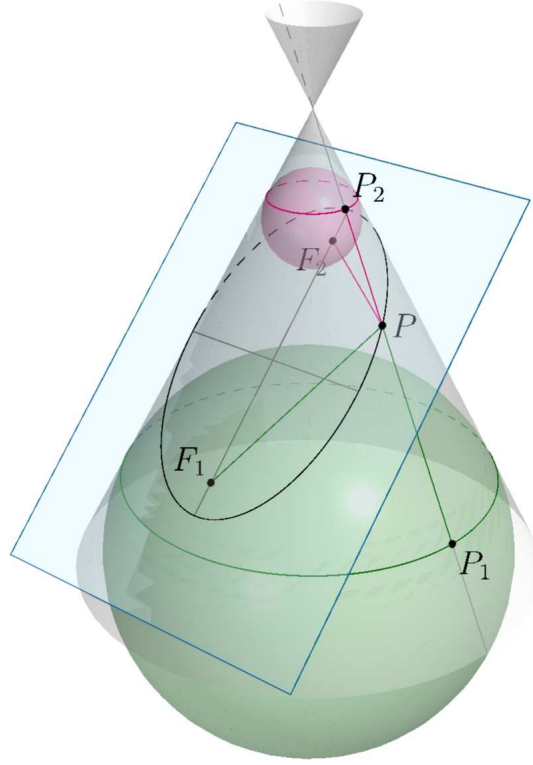
- Nech $\theta < \varphi$, teda k sa zobrazí na krivku pozostávajúcu z dvoch komponent. Ktoré body kružnice k sa zobrazia na nevlastné body roviny β ?
- To isté zadanie ako v časti (a), ale nech $\theta = \varphi$, čiže obrazom kružnice je súvislá neohraničená krivka.

2.1. Elipsa ako rez kuželovej plochy. Zamierame sa najprv na prvý prípad, keď prienikom $\mathcal{K} \cap \beta$ je súvislá ohraničená krivka.

VETA 5.2 (Quetelet-Dandelin, QD). *Nech $\mathcal{K}$ je rotačná kuželová plocha. Nech rovina β neprechádza vrcholom tejto kuželovej plochy a nech zvierá s osou rotácie uhol väčší, ako s osou rotácie zvierajú tvoriace priamky $\mathcal{K}$.*

Potom $\mathcal{K} \cap \beta$ je elipsa. Navyše, ak $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ sú sféry vpísané do $\mathcal{K}$ tak, že sa dotýkajú roviny β z navzájom opačných strán (tzv. **Dandelinove sféry**), body dotyku sfér $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ s rovinou β sú ohniská tejto elipsy.

Dôkaz. Pomocou obrázku si skúste premyslieť detaily dôkazu samostatne. Postupuje sa presne tak isto, ako pri dôkaze Vety 5.1.



□

DÔSLEDOK. Nech úbežnica u je vzorom nevlastnej priamky v stredovej kolineácii κ . Ak kružnica k nemá s u spoločný žiaden bod, potom $\kappa(k)$ je elipsa.

2.2. Metrická definícia hyperboly. Nech $F_1, F_2 \in \mathbb{E}^2$ sú rôzne body (tzv. **ohniská**) a nech a je kladné reálne číslo, pre ktoré platí $2a < |F_1, F_2|$. **Hyperbola** je množina takých bodov roviny, ktorých rozdiel vzdialeností od ohnísk je $2a$:

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid ||XF_1| - |XF_2|| = 2a\}.$$

Implicitnú rovnicu hyperboly odvodíme presne tak, ako sme to urobili pre elipsu. Nech

$$e = |F_1 F_2|/2,$$

číslo e je (**lineárna**) **excentricita** hyperboly. Označme b kladné reálne číslo, pre ktoré platí

$$(6) \quad e^2 = a^2 + b^2.$$

(Pozor na rozdiel oproti elipse!) Znovu zvolíme súradnice tak, aby ohniská ležali na x -osi súmerne podľa y -osi:

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0)$$

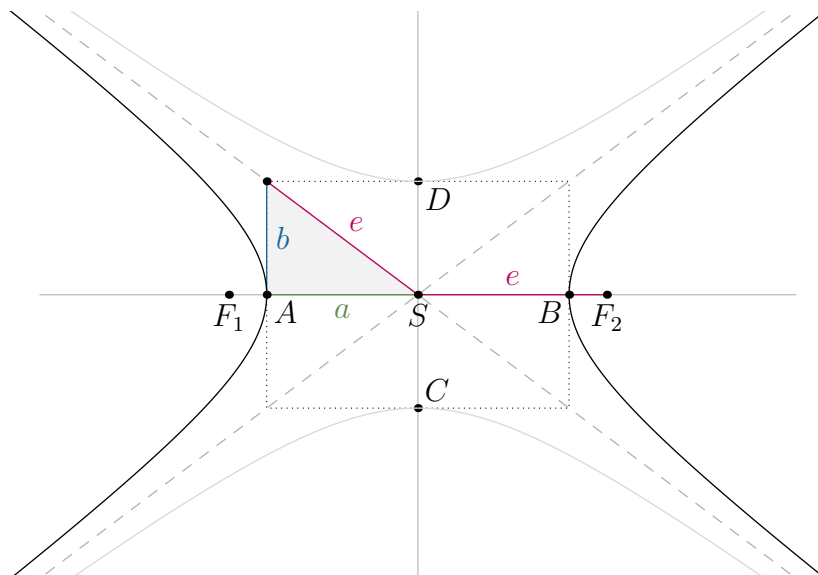
Bod $X = (x, y)$ potom leží na hyperbole práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} ||(x, y)(-e, 0)| - |(x, y)(e, 0)|| &= 2a \\ \left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| &= 2a. \end{aligned}$$

Algebraickými úpravami nakoniec dostaneme rovnicu

$$(7) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ktorú nazývame **kanonická rovnica** hyperboly.



K ďalšej terminológii:

- Pre hyperbolu s rovnicou (7) sa priamky

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

nazývajú **asymptotami** hyperboly. Sú to priamky, ktoré nemajú s hyperbolou žiaden spoločný bod. Všeobecnejšie, priamka tvaru $y = kx$, je sečnicou hyperboly práve vtedy, keď $k \in (-b/a, b/a)$.

- Priesečník asymptôt hyperboly je **stred hyperboly**. Stred hyperboly je tiež jej stredom súmernosti.
- Priamka $\overleftrightarrow{F_1 F_2}$ je **hlavná os** hyperboly. Body hyperboly na hlavnej osi, t.j. body $(-a, 0)$, $(a, 0)$ sú **vrcholy**, alebo tiež **hlavné vrcholy** hyperboly. Dĺžka a , ktorá je tiež vzdialenosťou hlavného vrchola od stredu hyperboly, je **dĺžka hlavnej poloosi**.
- Priamka prechádzajúca stredom hyperboly a kolmá na hlavnú os je **vedľajšia os** hyperboly. Veličina b sa nazýva **dĺžkou vedľajšej poloosi** hyperboly. Body $(0, -b)$ a $(0, b)$ na vedľajšej osi sa nazývajú **vedľajšími vrcholmi hyperboly**.

Pozor: vedľajšie vrcholy nie sú bodmi hyperboly! Sú ale (hlavnými) vrcholmi tzv. **konjugovanej hyperboly** k hyperbole (7), t.j. hyperboly s rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

- **Charakteristický trojuholník hyperboly** je pravouhlý trojuholník s dĺžkami strán a , b , e , ktorého dva z vrcholov sú stred a hlavný vrchol hyperboly a jeho tretí vrchol leží na asymptote hyperboly, viď obrázok.
- Hlavná aj vedľajšia os hyperboly sú aj osami jej súmernosti.
- Ak e je lineárna excentricita hyperboly a a je dĺžka jej hlavnej poloosi, potom

$$\epsilon = \frac{e}{a}$$

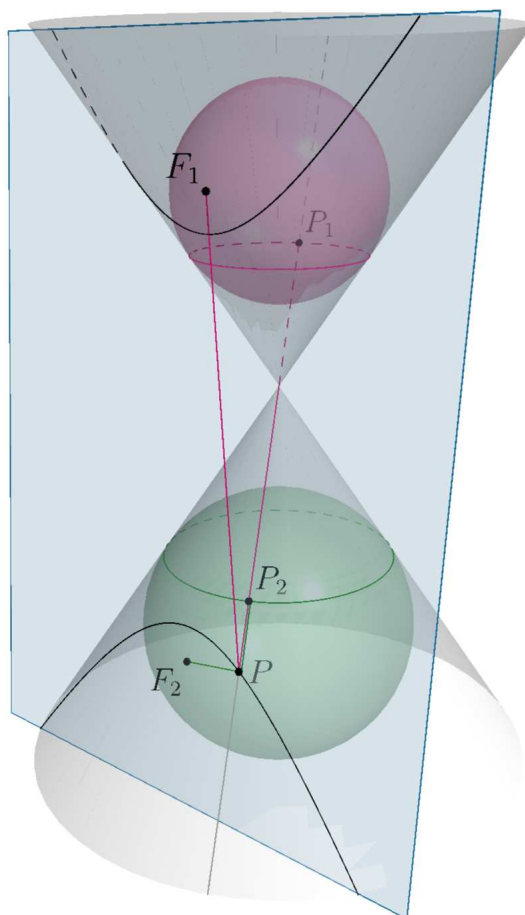
je **numerická excentricita** hyperboly. Numerická excentricita hyperboly je vždy väčšia ako 1. Numerická excentricita sa (na rozdiel od lineárnej) podobnosťou zachováva.

2.3. Hyperbola ako rez kuželovej plochy.

VETA 5.3 (Quetelet-Dandelin, QD). *Nech $\mathcal{K}$ je rotačná kuželová plocha. Nech rovina β neprechádza vrcholom tejto kuželovej plochy a nech zvierá s osou rotácie uhol menší, ako s osou rotácie zvierajú tvoriace priamky $\mathcal{K}$.*

*Potom $\mathcal{K} \cap \beta$ je hyperbola. Navyše, ak S_1, S_2 sú sféry vpísané do $\mathcal{K}$ tak, že sa dotýkajú roviny β (**Dandelinove sféry**), body dotyku sfér S_1, S_2 s rovinou β sú ohniská tejto hyperboly.*

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako v prípade elipsy. Tentokrát bod P z rezu $\beta \cap \mathcal{K}$ neleží medzi bodmi P_1 a P_2 na tvoriacej priamke $\mathcal{K}$ ale zvonka úsečky P_1P_2 , inak dôkaz postupuje rovnako.



□

DÔSLEDOK. *Nech úbežnica u je vzorom nevlastnej priamky v stredovej kolíneácii κ . Ak u je sečnicou kružnice k , potom $\kappa(k)$ je hyperbola.*

2.4. Metrická definícia paraboly. Nech d je priamka a F bod v rovine $\mathbb{E}^2$, pričom F neleží na d . **Parabola** je množina takých bodov roviny, ktoré majú od F a d rovnakú vzdialenosť:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF| = |Xd|\}.$$

Bod F nazývame **ohniskom** a priamku d **riadiacou priamkou** (**directrix**) paraboly $\mathcal{P}$. Vzdialenosť $p = |Fd|$ sa nazýva **parameter paraboly**.

Pre odvodenie implicitnej rovnice zvolíme súradnicovú sústavu tak, že $F = (p/2, 0)$ a d je rovnobežná s y -osou a x -os pretína v bode $(-p/2, 0)$. Bod $X = (x, y)$ vtedy leží na parabole, keď

$$\left| (x, y) \left(\frac{p}{2}, 0 \right) \right| = |(x, y)d|$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

odkiaľ nakoniec dostaneme **kanonickú rovnicu** paraboly:

$$y^2 = 2px.$$

Os súmernosti paraboly, pre parabolu v uvedenom kanonickom tvare ide o x -os, nazývame aj **os paraboly**. Bod paraboly na jej osi je **vrchol** paraboly.

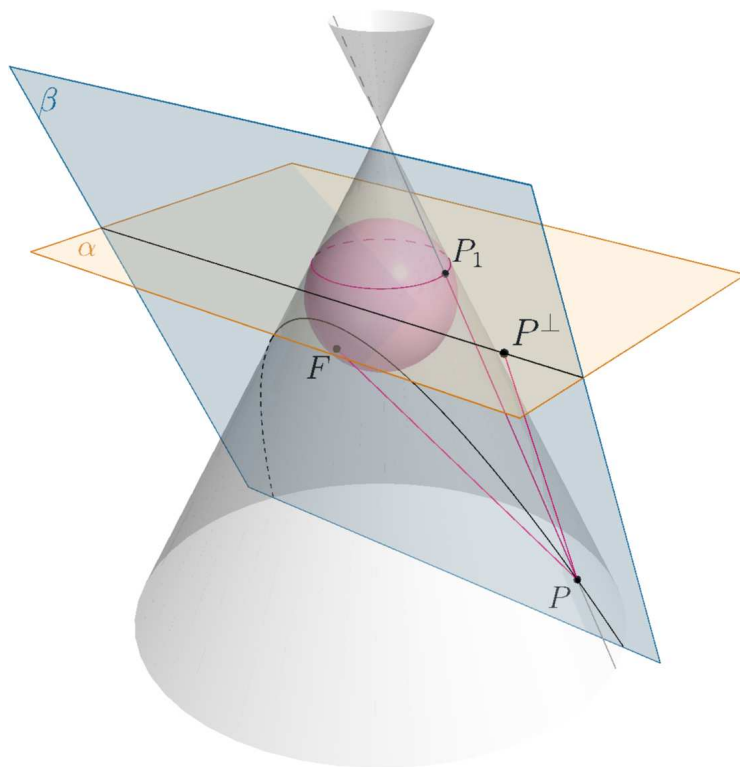
Numerická excentricita paraboly je rovná 1.

2.5. Parabola ako rez kužeľovej plochy.

VETA 5.4 (Quetelet-Dandelin, QD). *Nech $\mathcal{K}$ je rotačná kužeľová plocha. Nech rovina β neprechádza vrcholom tejto kužeľovej plochy a nech zvierá s osou rotácie rovnako veľký uhol ako tvoriace priamky $\mathcal{K}$.*

*Potom $\mathcal{K} \cap \beta$ je parabola. Navyše, ak $\mathcal{S}$ je sféra vpísaná do $\mathcal{K}$ tak, že sa dotýka roviny β (**Dandelinove sféry**), bod dotyku sféry $\mathcal{S}$ s rovinou β je ohnisko tejto paraboly.*

Dôkaz.



Bod dotyku sféry $\mathcal{S}$ s rovinou β označme F . Ďalej označme ako α rovinu, v ktorej leží dotyková kružnica sféry $\mathcal{S}$ a kuželovej plochy $\mathcal{K}$. Nech d je priesečnica rovín α a β .

Pre ľubovoľný bod P krivky $\mathcal{K} \cap \beta$ nech P_1 je bod sféry $\mathcal{S}$ ležiaci na tvoriacej priamke prechádzajúcej bodom P a nech $P^\perp$ je kolmý priemer P na priamku d v rovine β . Ako pri predchádzajúcich dôkazoch, aj tu platí, že

$$(8) \quad |PP_1| = |PF|.$$

Navyše podľa predpokladu o rovine β vieme, že priamky $\overrightarrow{PP_1}$ a $\overleftarrow{PP^\perp}$ zvierajú s rovinou α zhodné uhly. Odtiaľ už môžeme usúdiť, že

$$|PP_1| = |PP^\perp|,$$

čo spolu s (8) dokazuje tvrdenie vety. □

NA ZAMYSLENIE. Vyargumentuje detailnejšie, prečo z faktu, že priamky $\overrightarrow{PP_1}$ a $\overleftarrow{PP^\perp}$ zvierajú s rovinou α zhodné uhly, vyplýva, že $|PP_1| = |PP^\perp|$. (Premietnite si bod P kolmo do roviny α a overte, že ste tak získali dva zhodné trojuholníky.)

DÔSLEDOK. *Nech úbežnica u je vzorom nevlastnej priamky v stredovej kolineácii κ . Ak u je dotyčnicou kružnice k , potom $\kappa(k)$ je parabola.*

3. Ešte niečo málo k terminológii kuželosečiek

Elipsa a parabola rozdeľujú rovinu na dve súvislé oblasti. Hyperbola sa javí rozdeľovať rovinu na oblasti tri. No keďže vieme, že ide o obraz kružnice v kolineácii, dve z týchto oblastí sú obrazom jednej oblasti určenej kružnicou, a preto na ne aj v prípade hyperboly budeme nahliadať ako na jednu oblasť.

Mnohé pojmy spojené s kuželosečkami a tiež ich vlastnosti môžeme veľmi jednoducho a pohodlne odvodiť z faktu, že každá kuželosečka je obrazom kružnice v nejakej kolineácii. Tak **vnúťrom** kuželosečky nazývame tú oblasť roviny, ktorá je obrazom vnútra kružnice, druhá oblasť určená kuželosečkou je jej **vonkajškom**.

Všimnite si, že vnútorná oblasť kuželosečky je v každom prípade tá oblasť, ktorá obsahuje aj jej ohniská v prípade elipsy a hyperboly (stred kružnice tu považujeme za dvojicu splývajúcich ohnísk elipsy), či ohnisko v prípade paraboly.

Kolineácia zachováva incidenciu útvarov a tiež bijektívne zobrazuje priamky na priamky. Tento fakt môžeme využiť pri skúmaní vzájomnej polohy priamky a kuželosečky. Veľmi rýchlo tak získame ďalšie vlastnosti a pojmy a to vďaka tomu, že sú nám dôverne známe v prípade kružnice a kolineácia ich zachováva:

- Lubovoľná priamka má s kuželosečkou spoločné najviac dva body.
- **Nesečnica** nemá s kuželosečkou spoločný žiaden bod a celá sa nachádza vo vonkajšej oblasti kuželosečky.
- **Dotyčnica** má s kuželosečkou spoločný jediný bod, všetky ostatné body dotyčnice sú vonkajšími bodmi kuželosečky.
- Každým bodom kuželosečky prechádza práve jedna dotyčnica.
- **Sečnica** má s kuželosečkou spoločný jeden alebo dva body a okrem nich obsahuje vnútorné aj vonkajšie body kuželosečky.

Ak by sme brali do úvahy aj nevlastné body roviny, sečnica by vždy pretínala kuželosečku v dvoch bodoch. Pokiaľ uvažujeme len vlastné body, v prípade paraboly aj hyperboly existujú sečnice, ktoré ju pretínajú len v jednom bode. Smery (t.j. nevlastné body) takýchto sečníc nazývame **asymptotické smery** kuželosečky. Inak povedané: asymptotickými smermi kuželosečky sú jej nevlastné body. Hyperbola má tak dva asymptotické smery, parabola jeden a elipsa nemá žiaden (reálny) asymptotický smer.

Sprievodič bodu kuželosečky je priamka spájajúca tento bod s ohniskom kuželosečky. Elipsa a hyperbola tak prirodzene majú dva sprievodiče. Pre parabolu dodefinujeme druhý sprievodič ako priamku s asymptotickým smerom prechádzajúcu daným bodom. Pod **dĺžkou sprievodiča** rozumieme

- (a) vzdialenosť príslušného bodu a ohniska;
- (b) v prípade paraboly a jej sprievodiča s asymptotickým smerom ide o vzdialenosť príslušného bodu od riadiacej priamky.

Vonkajší uhol sprievodičov je uhol určený sprievodičmi bodu kuželosečky, ktorého jedno rameno smeruje dovnútra kuželosečky a druhé von.

4. Elipsa

4.1. Dotyčnice elipsy.

OTÁZKA 4. Prečo je dotyčnica ku kružnici kolmá na polomer prechádzajúci bodom dotyku?

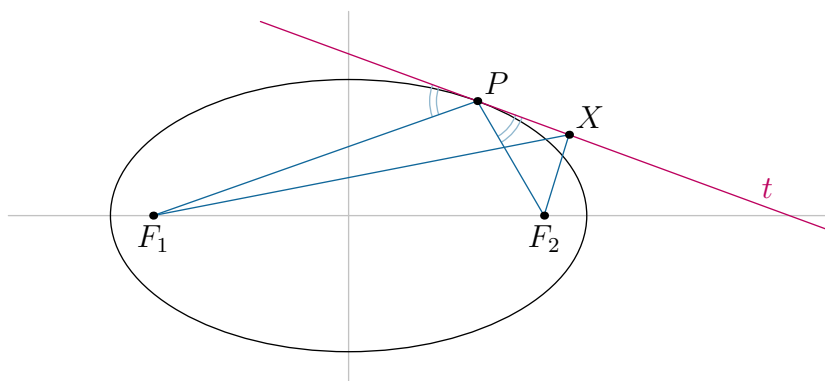
OTÁZKA 5. Nech body A, B ležia na jednej strane od priamky p . Nech X je taký bod na p , že vzdialenosť $|AX| + |BX|$ je minimálna. Prečo priamky $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{BX}$ zvierajú s p zhodné uhly?

VETA 5.5. Nech P je bod elipsy a t nech je dotyčnica tejto elipsy v bode P . Potom sprievodiče bodu P zvierajú s dotyčnicou t zhodné uhly. Ekvivalentne: dotyčnica elipsy rozpoľuje vonkajší uhol sprievodičov.

Dôkaz. Nech $X \in t$ je ľubovoľný bod rôzny od P . Bod X je vonkajším bodom elipsy, preto

$$|F_1X| + |XF_2| > |F_1P| + |PF_2|,$$

kde F_1 a F_2 sú ohniská elipsy.



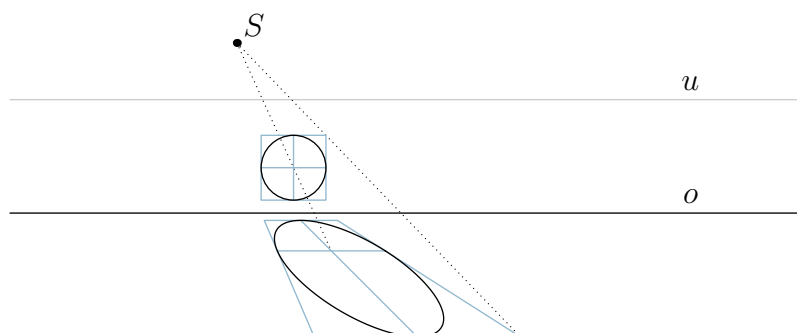
Vidíme, že bod P je presne tým bodom priamky t , pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od ohnísk minimálny. Odtiaľ dostávame tvrdenie vety (viď Otázka 5). $\square$

4.2. Elipsa ako obraz kružnice v kolineácii.

ZADANIE 1. Nech κ je stredová kolineácia (stred kolineácie je vlastný bod euklidovskej roviny) s osou o . Majme danú kružnicu k . Nech úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) nepretína kružnicu k a ani sa jej nedotýka. Zostrojte obraz kružnice k v kolineácii κ .

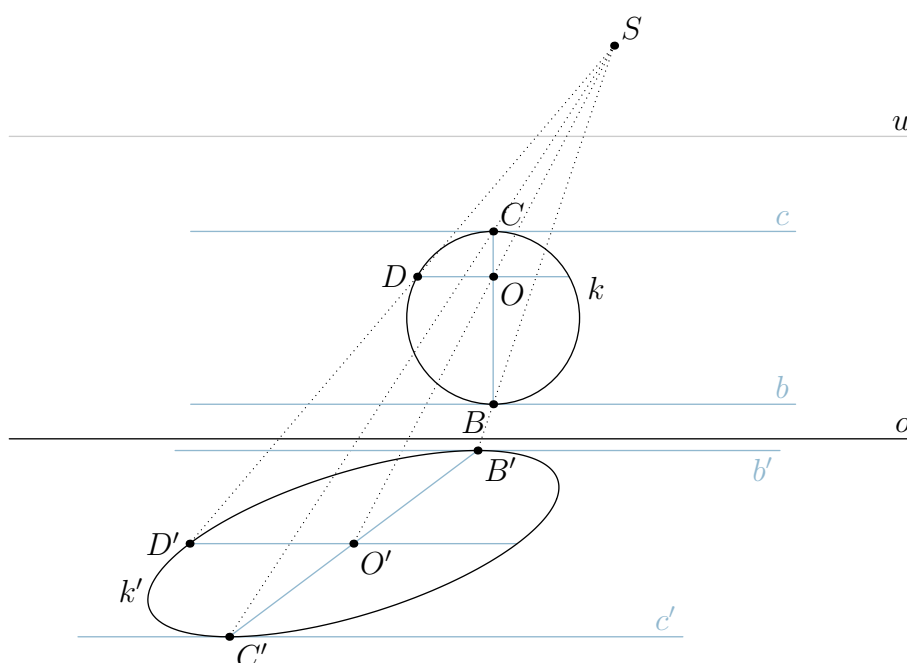
Rozbor. Obrazom kružnice k v kolineácii κ je elipsa, nájdeme jej osi.

V kolineácii κ obrazom dvojice navzájom kolmých priemerov určite nebude dvojica združených priemerov, ako tomu bolo v prípade afinity. Dokonca ani stred kružnice sa určite nezobrazí na stred elipsy, viď obrázok.



Teda v kolineácii nemáme zaručené ani to, že priemer kružnice sa zobrazí na priemer elipsy. Vieme len, že obrazom priemeru kružnice je tetiva elipsy.

Pozrime sa ale bližšie na priemer BC kružnice k , ktorý je kolmý na os o :



- Dotyčnica b ku kružnici k v bode B je rovnobežná s osou o , preto aj jej obraz b' je rovnobežný s osou o a tiež je b' dotyčnicou elipsy k' v bode B' ; to isté platí pre bod C .
- Keďže dotyčnice elipsy k' v koncových bodoch tetivy $B'C'$ sú navzájom rovnobežné, je tetiva $B'C'$ určité priemerom elipsy k' ; ide o jediný priemer kružnice, ktorý sa zobrazí na priemer elipsy.
- Smer priemeru združeného s priemerom $B'C'$ je ten istý, ako smer dotyčníc b' a c'
- a keďže ide aj o smer osi o , ktorý sa v kolineácii zachováva, bude mať ten istý smer aj tetiva kružnice k , ktorá sa zobrazuje na priemer združený s $B'C'$.

Postup konštrukcie.

- (1) B, C ; BC je priemerom kružnice k kolmý na os o ,
- (2) B', C' ; $B' = \kappa(B)$, $C' = \kappa(C)$,

- (3) O' ; O' je stred úsečky $B'C'$,
- (4) O ; $O' = \kappa(O)$ (O je vzor O'),
- (5) D ; $D \in k$, $OD \perp BC$,
- (6) D' ; $D' = \kappa(D)$,
- (7) zo združených polomerov $O'B'$, $O'D'$ pomocou Rytzovej konštrukcie (viď odsek 3.6 v kapitole o osovej afinite) nájdeme osi elipsy a zostrojíme elipsu.

5. Parabola

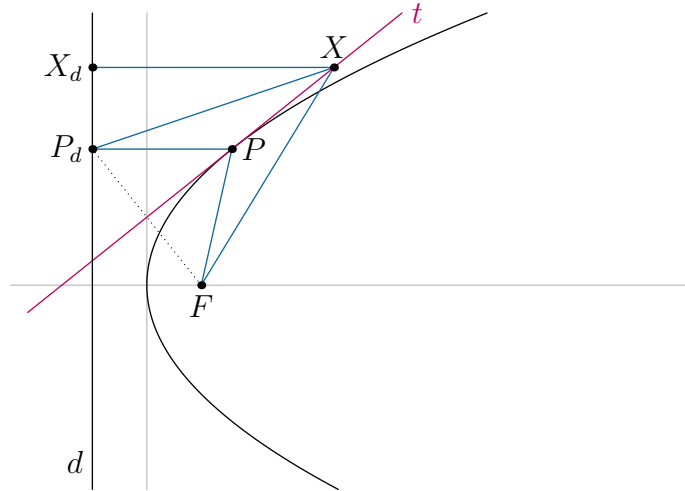
5.1. Dotyčnice paraboly.

TVRDENIE 5.6. *Dotyčnica paraboly v ľubovoľnom jej bode rozpoľuje vonkajší uhol jeho sprievodičov.*

Dôkaz. Vonkajšie body paraboly sú presne tie body X , pre ktoré platí, že

$$|Xd| < |XF|,$$

kde d je riadiaca priamka a F ohnisko paraboly.



Nech t je os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu P danej paraboly. Nech P_d je kolmý priemet bodu P na riadiacu priamku (t.j. $\overleftrightarrow{PP_d}$ je sprievodič bodu P). Potom z definície paraboly je t aj osou úsečky FP_d .

Pre bod X priamky t rôznej od P potom platí

$$|XF| = |XP_d| > |Xd|,$$

ide teda o vonkajší bod paraboly. Odtiaľ vidíme, že t je jej dotyčnicou v bode X .

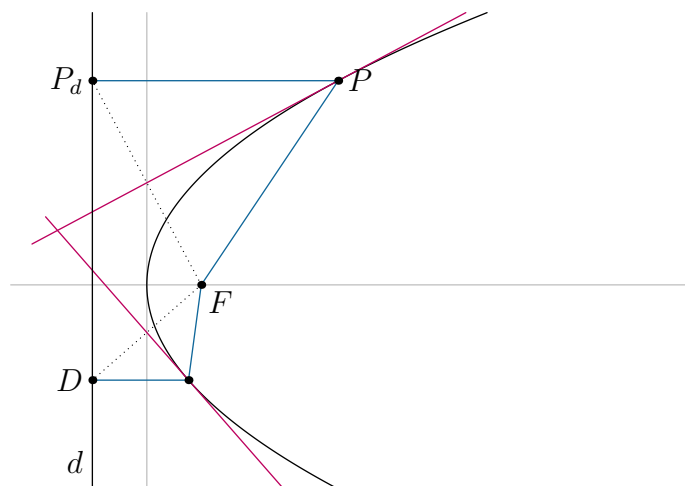
Keďže kuželosečka má v každom svojom bode presne jednu dotyčnicu (odsek 3), platí aj opačná implikácia: ak t je jej dotyčnicou v bode P , potom t rozpoľuje vonkajší uhol sprievodičov bodu P . $\square$

VETA 5.7.

- (i) *Body súmerne združené s ohniskom paraboly podľa všetkých jej dotyčníc tvoria riadiacu priamku paraboly.*

- (ii) *Kolmé priemety ohniska paraboly na všetky jej dotyčnice tvoria dotyčnicu vo vrchole paraboly.*

Dôkaz. Ide o dôsledok Tvrdenia 5.6.



- (i) Dotyčnica v bode P je osou úsečky P_dF . Bod P_d je teda obrazom ohniska v súmernosti podľa dotyčnice a leží na radiacej priamke.

Naopak nech D je ľubovoľný bod na radiacej priamke. Potom bod na osi úsečky DF ležiaci zároveň na priamke prechádzajúcej bodom D a rovnobežnej s osou paraboly, je bodom paraboly, a body D a F sú osovo združené podľa dotyčnice v tomto bode.

- (ii) Päta kolmice z ohniska na dotyčnicu v bode P je stredom úsečky FP_d . Tvrdenie je tak priamočiarym dôsledkom časti (i). $\square$

VETA 5.8.

- (i) *Pre ľubovoľný smer rôzny od asymptotického smeru paraboly existuje dotyčnica k tejto parabole rovnobežná s daným smerom.*
(ii) *Ľubovoľným vonkajším bodom paraboly možno viesť k tejto parabole dve dotyčnice.*

Dôkaz. Vyjdeme z toho, že ľubovoľným vlastným aj nevlastným vonkajším bodom kružnice prechádzajú dve jej dotyčnice. Kolineácia tieto vlastnosti zachováva, preto tvrdenie platí aj pre parabolu. Dostávame tak tvrdenie (ii) vety.

Ľubovoľný smer, ktorý nie je asymptotickým smerom paraboly, je nevlastným bodom, ktorý je vonkajší vzhľadom na parabolu. Existujú preto dve dotyčnice obsahujúce tento nevlastný bod: nevlastná priamka a dotyčnica, ktorá je predmetom tvrdenia (i). $\square$

ZADANIE 2. Parabola nech je určená ohniskom a radiacou priamkou. Pre daný smer rôzny od asymptotického smeru paraboly zostrojte k parabole dotyčnicu majúcu daný smer.

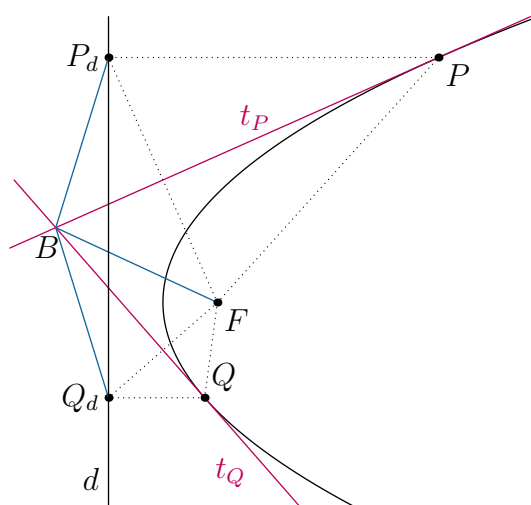
Rozbor. Využijeme znalosť, že dotyčnica v bode P paraboly je osou úsečky určenej ohniskom F a pätou kolmice P_d z P na radiaciu priamku.

Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko, d riadiaca priamka paraboly a s nech je daný smer dotýčnice.

- (1) $l; l \ni F, l \perp s$,
- (2) $P_d; P_d \in d \cap l$,
- (3) $t; t$ je os $FP_d - t$ je hľadaná dotýčnica.

ZADANIE 3. Parabola nech je určená ohniskom a riadiacou priamkou. Zostrojte jej dotýčnice prechádzajúce daným vonkajším bodom.

Rozbor. Znovu využijeme vlastnosť dotýčnice, že je osou úsečky určenej ohniskom F a pätou kolmice z bodu paraboly na riadiacu priamku.



Nech B je priesečník dotýčníc t_P a t_Q paraboly v bodoch P a Q . Potom $|BP_d| = |BF|$, lebo t_P je osou P_dF ; analogicky $|BQ_d| = |BF|$. Body P_d, F a Q_d tak ležia na spoločnej kružnici so stredom B .

Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko, d riadiaca priamka paraboly a B vonkajší bod paraboly.

- (1) $k; k(B, |BF|)$,
- (2) $P_d, Q_d; \{P_d, Q_d\} = k \cap d$,
- (3) $t_P, t_Q; t_P$ je os FP_d , t_Q je os $FQ_d - t_P, t_Q$ sú hľadané dotýčnice.

5.2. Parabola ako obraz kružnice v kolineácii.

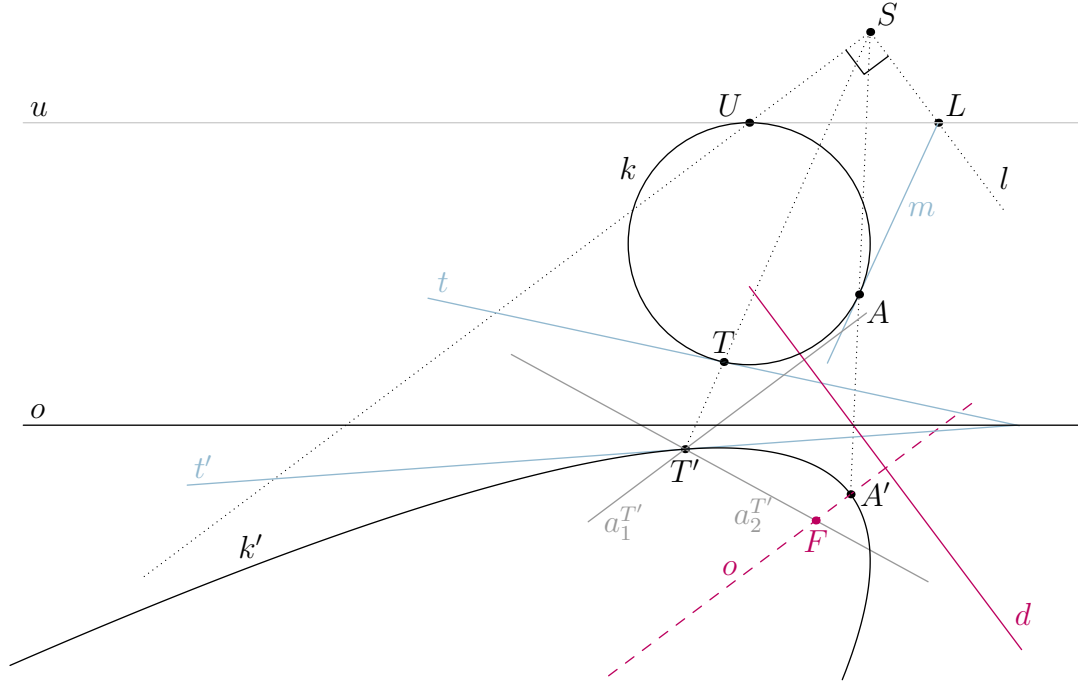
ZADANIE 4. Nech κ je stredová kolineácia Nech sa úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) dotýka kružnice k . Zostrojte obraz k v kolineácii κ .

Rozbor. Obrazom kružnice k v kolineácii κ je parabola, nájdeme jej ohnisko a riadiacu priamku.

Akýkoľvek zväzok priamok so stredom na úbežnici sa v kolineácii κ zobrazí na osnovu. Spomedzi týchto zväzkov sú pre konštrukciu dôležité dva. Prvý má stred v bode dotyku U kružnice k s úbežnicou u . Samodružnou priamkou tohto zväzku je $\overleftrightarrow{SU}$ a tak sa v kolineácii zobrazí na osnovu, do ktorej patrí aj os paraboly k' . Druhým dôležitým zväzkom je zväzok obsahujúci samodružnú priamku prechádzajúcu S a kolmú na

$\overleftrightarrow{SU}$. Tento zväzok sa zobrazí na osnovu kolmú na os paraboly k' , teda bude obsahovať riadiacu priamku paraboly aj dotýčnicu v jej vrchole.

Postup konštrukcie.



Nech S je stred, o os a u úbežnica kolíneácie κ .

- (1) U ; $U \in k \cap u$,
- (2) l ; $l \ni S$, $l \perp \overleftrightarrow{SU}$,
- (3) L ; $L \in l \cap u$,
- (4) m, A ; $m \ni L$, m sa dotýka kružnice k v bode A rôznom od U ,
- (5) A' ; $A' = \kappa(A)$ – A' je vrchol paraboly k' ,
- (6) o ; $o \ni A'$, $o \parallel \overleftrightarrow{SU}$ – o je osou paraboly k' ,
- (7) T, t ; $T \in k$, $T \neq U$, $T \neq A$, t je dotýčnica kružnice k v bode T ,
- (8) T', t' ; $T' = \kappa(T)$, $t' = \kappa(t)$,
- (9) $a_1^{T'}$; $a_1^{T'} \ni T'$, $a_1^{T'} \parallel o - a_1^{T'}$ je sprievodič bodu T' paraboly k' ,
- (10) $a_2^{T'}$; $a_2^{T'}$ je obraz $a_1^{T'}$ v súmernosti podľa dotýčnice t' – $a_2^{T'}$ je druhý sprievodič bodu T' ,
- (11) F ; $F \in o \cap a_2^{T'}$ – F je ohnisko paraboly k' ,
- (12) d ; $d \perp o$, $|DA'| = |FA'|$ – d je riadiaca priamka paraboly k' .

NA ZAMYSLENIE. Vedeli by ste pre parabolu nájsť kolíneáciu, ktorá túto parabolu zobrazí na kružnicu?

5.3. Vizualizácia paraboly.

ZADANIE 5. (Bodová konštrukcia paraboly.) Parabolu danú riadiacou priamkou a ohniskom vizualizujeme tak, že nájdeme niekoľko jej bodov a následne načrtneme krivku, ktorá tieto body interpoluje.

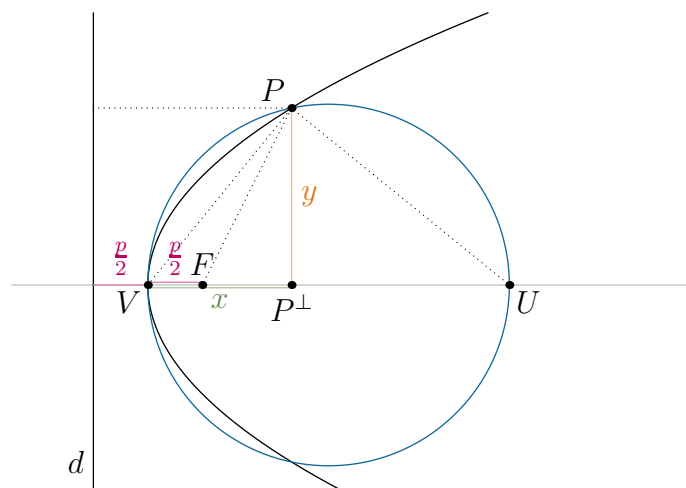
Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko a d riadiaca priamka paraboly. Jednotlivé body konštruujeme z metrickej definície paraboly:

- (1) nech c je ľubovoľné číslo nie menšie ako $|dF|/2$,
- (2) $l; l \parallel d, |ld| = c$,
- (3) $k; k(F, c)$,
- (4) $P; P \in l \cap k - P$ je bod paraboly.

Ak parabolu len črtáme, je užitočné poznať polomer osculačnej kružnice v jej vrchole.

VETA 5.9. *Polomer osculačnej kružnice vo vrchole paraboly je rovný parametru paraboly.*

Dôkaz. Nech sa kružnica so stredom na osi paraboly a polomerom r dotýka tejto paraboly vo vrchole a pretína ju v dvoch ďalších bodoch, navzájom súmerných podľa osi paraboly.



Bod P leží na parabole, preto $|PF| = |Pd|$, teda

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Z podobnosti trojuholníkov $\triangle VP^\perp P$ a $\triangle PP^\perp U$ (oba sú podobné s $\triangle VPU$) zas máme

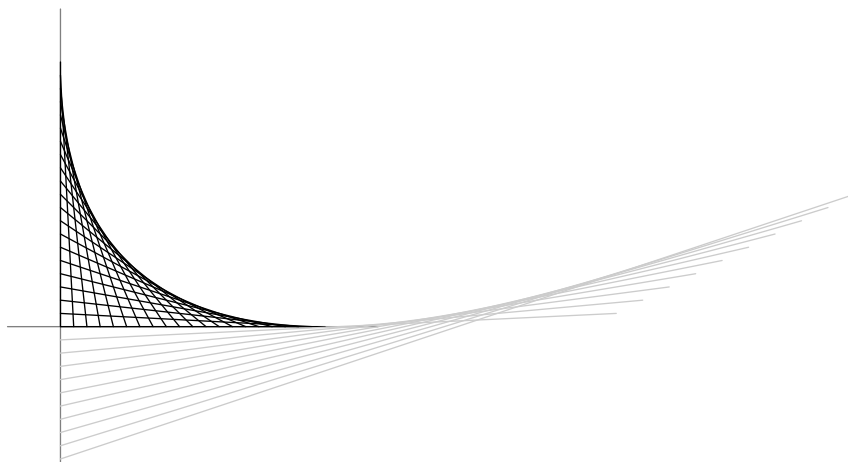
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2r - x}.$$

Z týchto dvoch rovností po úpravách dostaneme

$$2r = x + 2p.$$

Oskulačnú kružnicu získame ako limitu, keď sa bodom P pohybujeme po parabole smerom k vrcholu, teda keď $x = 0$. Odtiaľ vidíme, že polomer osculačnej kružnice je rovný p , parametru paraboly. $\square$

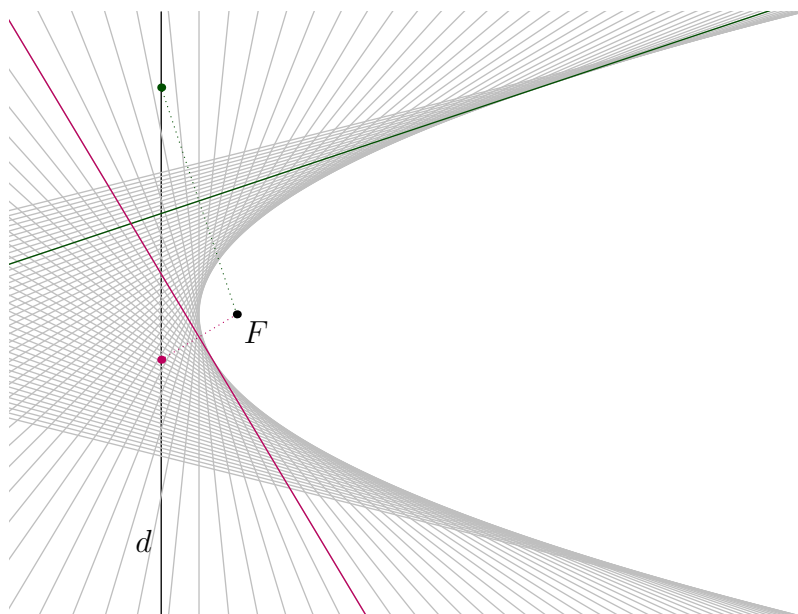
NA ZAMYSLENIE. Ak na dvoch navzájom priamkach pospájate body s rovnakými rozstupmi (viď obrázky), objaví sa parabola. Prečo?



Muslia byť dané priamky na seba kolmé, aby obálkou bola časť paraboly?

ZADANIE 6. (Parabola ako obálka svojich dotyčníc.) Parabolu danú riadiacou priamkou a ohniskom vizualizujeme tak, že vykreslíme jej dotyčnice.

Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko a d riadiaca priamka paraboly. Dotyčnice paraboly konštruujeme podľa Vety 5.7.



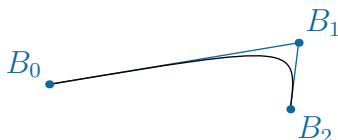
- (1) nech D je ľubovoľný bod na riadiacej priamke d ,
- (2) t ; t je os FD – t je dotyčnica paraboly.

POZNÁMKA. Z projektívnej geometrie možno už poznáte pojem duálna krivka: pre danú krivku v projektívnej rovine ide o množinu jej dotyčníc chápanú ako krivku v duálnej projektívnej rovine. Keď vizualizujete parabolu ako obálku dotyčníc, robíte vlastne bodovú konštrukciu duálnej krivky k tejto parabole.

ZADANIE 7. (Parabola ako kvadratická Bézierova krivka.) Nech κ je stredová kolíneácia a nech sa úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) dotýka kružnice k . Nech A, B

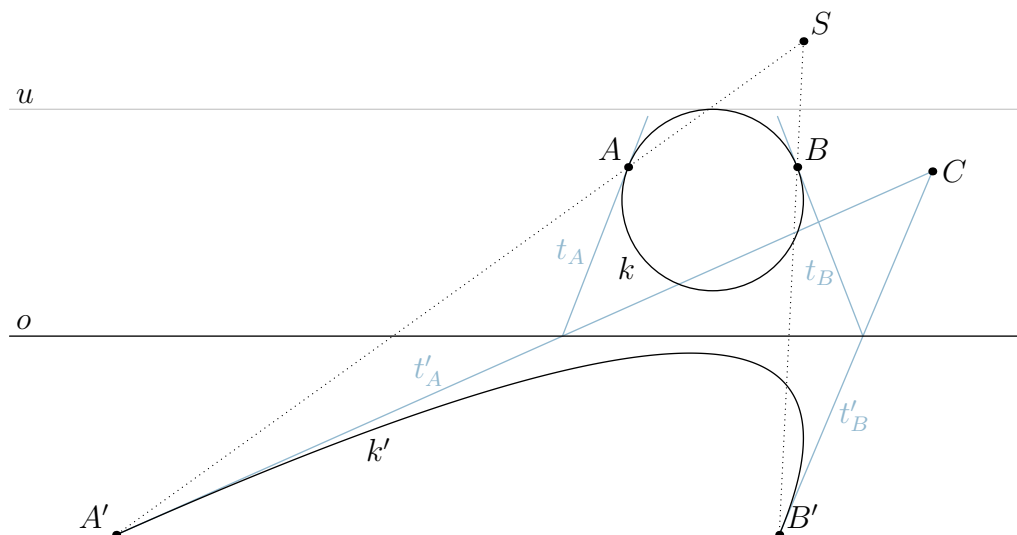
sú body na kružnici neležiace na u . Nájďme obraz oblúka AB kružnice disjunktného s u .

Rozbor. Kvadratická Bézierova krivka je vždy časťou paraboly a naopak ktorýkoľvek oblúk ľubovoľnej paraboly môžeme interpretovať ako Bézierovu krivku.



Kvadratická Bézierova krivka je určená tromi riadiacimi vrcholmi. Prvý a posledný vrchol interpoluje ako začiatkový a koncový bod krivky. Prostredný riadiaci vrchol zas určuje smery dotyčníc v začiatkovom aj koncovom bode krivky.

Postup konštrukcie.



- (1) $A, B; A, B \in k, A, B \notin u$,
- (2) $A'; A' = \kappa(A)$,
- (3) $t_A; t_A$ je dotyčnica kružnice v bode A ,
- (4) $t'_A; t'_A = \kappa(t_A)$,
- (5) B', t_B, t'_B – analogicky,
- (6) $C; C \in t'_A \cap t'_B$,
- (7) Bézierova krivka s riadiacimi vrcholmi A', C, B' je obraz oblúka AB v kolineácii κ .

6. Hyperbola

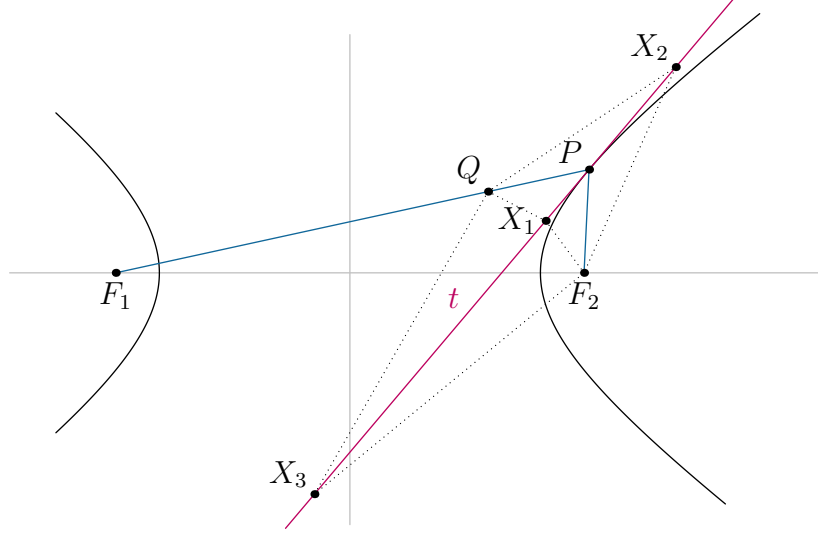
6.1. Dotyčnice hyperboly.

TVRDENIE 5.10. Dotyčnica hyperboly v ľubovoľnom jej bode rozpoľuje vonkajší uhol jeho sprievodičov.

Dôkaz. S označením podľa metrickej definície hyperboly pre jej vonkajšie body platí, že

$$||XF_1| - |XF_2|| < 2a,$$

pre vnútorné platí opačná nerovnosť.



Bez ujmy na všeobecnosti nech bod P leží na vetve paraboly bližšie k ohnisku F_2 a nech t je os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu P danej hyperboly. Nech Q je bod súmerný s bodom P podľa priamky t . Z konštrukcie priamky t potom Q leží na F_1P a z definície hyperboly $|F_1Q| = 2a$. Potom pre ľubovoľný bod $X \in t$ rôzny od P platí

$$|XQ| = |XF_2|$$

a preto ak X je bližšie k ohnisku F_2 než F_1 (prípady X_1 a X_2 na obrázku), tak s využitím trojuholníkovej nerovnosti

$$0 < |XF_1| - |XF_2| < (|XQ| + |QF_1|) - |XF_2| = (|XF_2| + 2a) - |XF_2| = 2a$$

prípade, ak X je bližšie k ohnisku F_1 (X_3 na obrázku), potom

$$0 < |XF_2| - |XF_1| = |XQ| - |XF_1| < |F_1Q| = 2a.$$

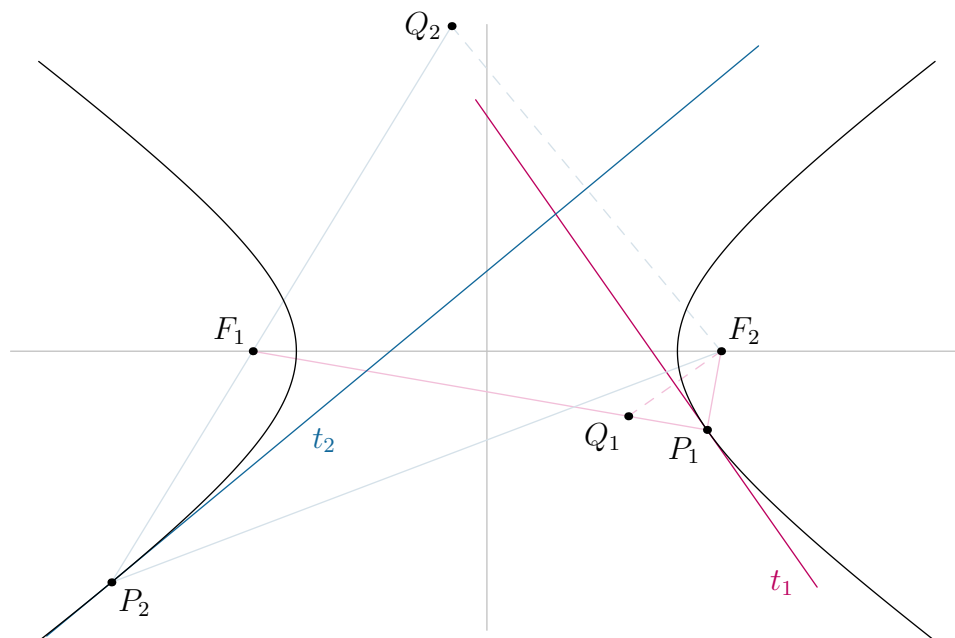
V každom prípade je X vonkajším bodom hyperboly, a preto je t dotyčnicou. Tvrdenie potom tak ako v prípade paraboly vyplýva z faktu, že dotyčnica v bode hyperboly je jediná. $\square$

VERA 5.11.

- (i) *Body súmerne združené s jedným ohniskom hyperboly podľa všetkých jej dotyčníc vrátane asymptôt (i.e. dotyčníc v nevlastných bodoch) tvoria kružnicu so stredom v druhom ohnisku a polomerom $2a$ (tzv. **riadiacu kružnicu hyperboly**).*
- (ii) *Kolmé priemety ohniska paraboly na všetky jej dotyčnice tvoria kružnicu so stredom v strede hyperboly a polomerom a .*

Dôkaz. (i) Podľa dôkazu Tvrdenia 5.10 ak uvažujeme dotyčnicu hyperboly v bode P ležiacom na vetve, ktorá je bližšie k F_2 ako k F_1 , potom obraz F_2 podľa tejto dotyčnice leží na F_1P vo vzdialenosti $2a$ od F_1 . Ak by sa bod P nachádzal na vetve bližšej k ohnisku F_1 , jeho obraz v súmernosti podľa dotyčnice by ležal na polpriamke opačnej k

$\overrightarrow{F_1P}$, no jeho vzdialenosť od F_1 by zase bola rovná $2a$. V každom prípade teda obraz ohniska leží na kružnici g_1 so stredom F_1 a polomerom $2a$.



Zo spojitosti týmto spôsobom pokryjeme všetky body kružnice $g_1(F_1, 2a)$ okrem dvoch bodov, konkrétne obrazov ohniska F_2 podľa asymptôt.

(ii) Hľadaná množina je obrazom množiny bodov z časti (i) Tvrdenia v rovnoľahlosti so stredom v skúmanom ohnisku a koeficientom $1/2$. $\square$

NA ZAMYSLENIE. Pri uvažovaní o dotýčniciach hyperboly s určeným smerom či dotýčniciach prechádzajúcich daným vonkajším bodom hyperboly je výhodné, podobne ako v prípade paraboly, nahliadať na hyperbolu ako na obraz kružnice v kolineácii. Uvažujte len dotýčnice vo vlastných bodoch hyperboly. Skúste odpovedať:

- (i) Aké smery môžu mať dotýčnice hyperboly? Koľko dotýčníc hyperboly s daným smerom existuje?
- (ii) Ktorými vonkajšími bodmi hyperboly možno viesť k hyperbole dve dotýčnice? Z ktorých bodov je možné zostrojiť iba jednu dotýčnicu?

ZADANIE 8. Pre hyperbolu určenú ohniskami a jedným vrcholom a pre daný smer s zostrojte k hyperbole dotýčnice majúce smer s , ak existujú.

Postup konštrukcie. V konštrukcii sa oprieme o Vetu 5.11.

- (1) S ; S je stred hyperboly,
- (2) k ; $k(S, a) - k$ je kružnica dotýkajúca sa vrcholov hyperboly,
- (3) l ; $l \ni F_2$ a $l \perp s$,
- (4) K ; $K \in k \cap l$,
- (5) t ; $t \ni K$, $t \perp l - t$ je hľadaná dotýčnica.

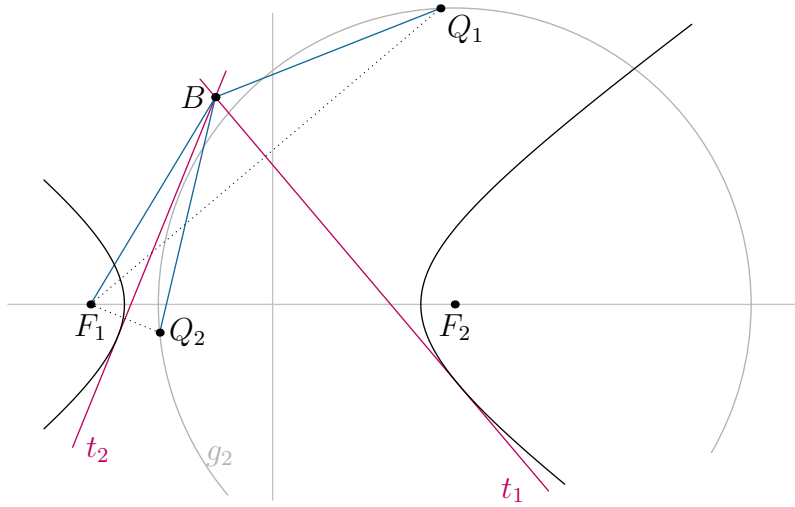
Alternatívne môžeme namiesto kružnice k využiť riadiacu kružnicu hyperboly:

- (1) g_1 ; $g_1(F_1, 2a)$,

- (2) $l; l \ni F_2$ a $l \perp s$,
- (3) $L; L \in g_1 \cap l$,
- (4) $t; t$ je os $F_2L - t$ je hľadaná dotyčnica.

ZADANIE 9. Pre hyperbolu určenú ohniskami a jedným vrcholom a pre daný vonkajší bod zostrojte dotyčnice hyperboly prechádzajúce týmto bodom, ak existujú.

Rozbor. Využijeme znova Vetu 5.11.



Nech F_1, F_2 sú ohniská hyperboly, a dĺžka hlavnej poloosi a B nech je daný vonkajší bod hyperboly. Obraz Q ohniska F_1 v súmernosti podľa dotyčnice t_i leží na riadiacej kružnici $g_2(F_2, 2a)$. Keďže bod B leží na dotyčnici t_i , platí, že $|BQ| = |BF_1|$.

Postup konštrukcie.

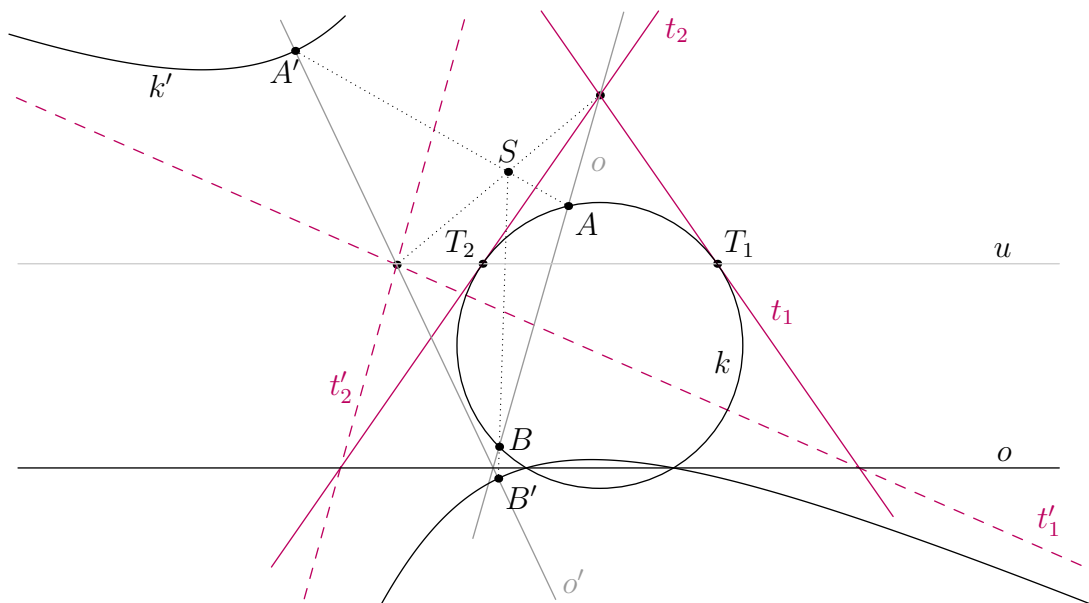
- (1) $g_2; g_2(F_2, 2a)$,
- (2) $k; k(B, |BF_1|)$,
- (3) $Q; Q \in k \cap g_2$,
- (4) $t; t$ je os $F_1Q - t$ je dotyčnica prechádzajúca bodom B .

Diskusia. Kružnica k vždy pretne kružnicu g_2 v dvoch bodoch, a to aj napriek tomu, že vo vonkajšej oblasti hyperboly existujú body, z ktorých nie je možné zostrojiť k hyperbole dve dotyčnice. V takých prípadoch namiesto dotyčnice týmto postupom zostrojíme asymptotu, čo je de facto tiež dotyčnica, akurát v nevlastnom bode.

6.2. Hyperbola ako obraz kružnice v kolineácii.

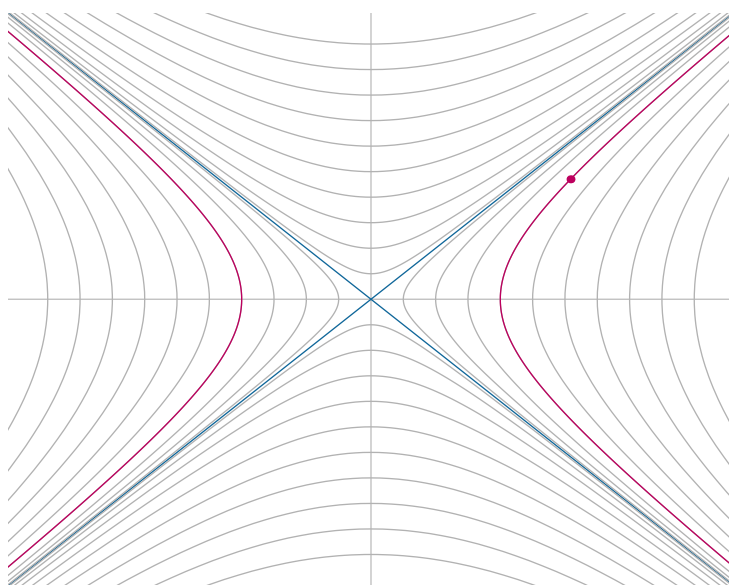
ZADANIE 10. Nech κ je stredová kolineácia Nech úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) pretína kružnicu k v dvoch bodoch. Zostrojte obraz k v kolineácii κ .

Postup konštrukcie. Nech S je stred, o os a u úbežnica kolineácie κ .



- (1) $T_1, T_2; \{T_1, T_2\} = k \cap u$,
- (2) t_i ; t_i je dotyčnica k v bode T_i ($i = 1, 2$),
- (3) t'_i ; $t'_i = \kappa(t_i)$ ($i = 1, 2$) – t'_i sú asymptoty hyperboly k' ,
- (4) o' ; o' je os uhla priamok t'_1, t'_2 ,
- (5) o ; $o' = \kappa(o)$,
- (6) $A, B; \{A, B\} = k \cap o$,
- (7) A', B' ; $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$ – A', B' sú vrcholy hyperboly k' .

Pre pevne zvolenú dvojicu rôznobežiek existuje veľa hyperbol takých, že dané rôznobežky sú jej asymptotami. Tieto hyperboly pokrývajú všetky body roviny okrem asymptôt a dve rôzne hyperboly sú navzájom disjunktné. Preto každým bodom neležiacim na žiadnej z asymptôt prechádza presne jedna hyperbola.



Zaujímavou otázkou je, ako túto hyperbolu skonštruovať, čiže ako nájsť nejaký určujúci prvok – keďže asymptoty sú známe stačí jedna z veličín a , b alebo e .

Táto konštrukcia môže byť užitočná napríklad aj pri hľadaní obrazu kružnice v kolíneácii, viď predchádzajúce zadanie: ak úbežnica pretína kružnicu v dvoch bodoch, zobrazí sa v kolíneácii na hyperbolu. Asymptoty tejto hyperboly vieme nájsť veľmi ľahko zobrazením priesečníka dotyčníc kružnice v jej priesečníkoch s úbežnicou. Pokiaľ má napríklad kružnica s osou kolíneácie spoločný bod, máme hneď aj jeden bod hyperboly a týmito prvkami je hyperbola už jednoznačne určená.

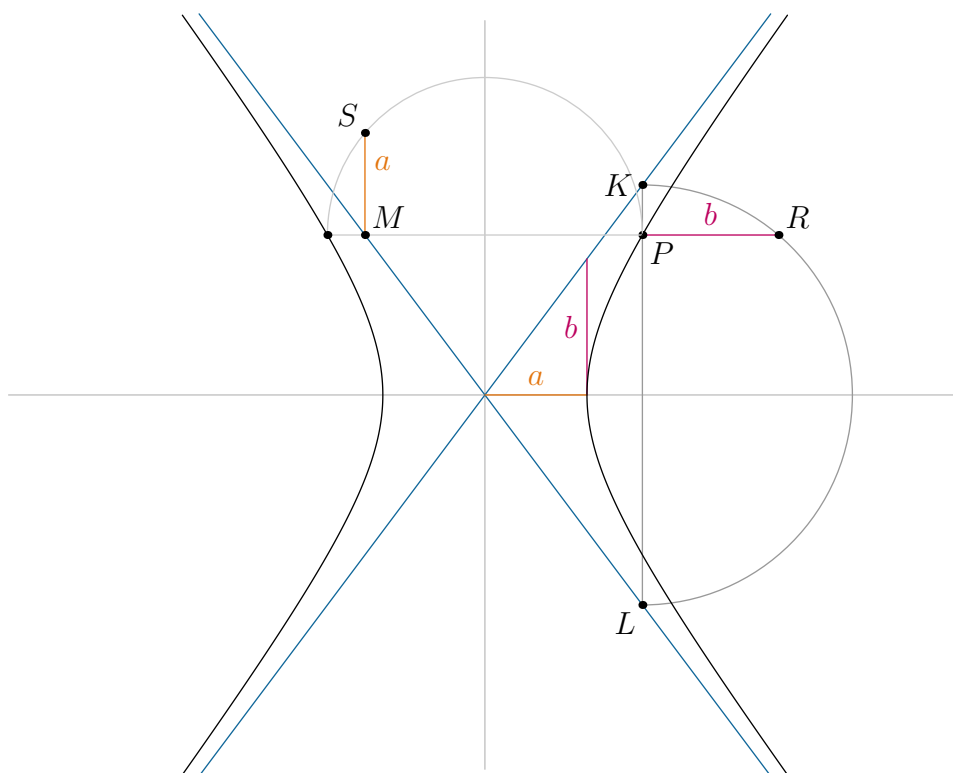
ZADANIE 11. Dané sú asymptoty a jeden bod hyperboly. Nájdite vrcholy tejto hyperboly.

Rozbor. Nech a_1 , a_2 sú asymptoty a P je bod hyperboly. Zavedieme si súradnice tak, aby hyperbola mala kanonický tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

teda asymptoty sú priamky

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$



Daný bod P hyperboly nech má súradnice $P = (p, q)$. Body K , L nech sú body na asymptotách s rovnakou x -súradnicou ako má bod P :

$$K = \left(p, \frac{b}{a}p\right), \quad L = \left(p, -\frac{b}{a}p\right).$$

Potom

$$|PK| \cdot |PL| = \left(\frac{b}{a}p - q\right) \left(\frac{b}{a}p + q\right) = b^2 \left(\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) = b^2.$$

Velkosť b sa preto rovná dĺžke úsečky PR , kde R je bod na kružnici nad priemerom KL kolmej na KL (viď obrázok).

Analogicky sa dá skonštruovať dĺžka a hlavnej poloosi: bude rovná dĺžke úsečky MS , viď obrázok.

Postup konštrukcie.

- (1) o ; o je os uhla asymptôt obsahujúceho bod hyperboly,
- (2) l ; $l \ni P$, $l \perp o$,
- (3) K, L ; $K = l \cap a_1$, $L = l \cap a_2$,
- (4) k ; k je Tálesova kružnica nad KL ,
- (5) R ; $R \in k$, $PR \perp l$,
- (6) pomocou $b = |PR|$ a asymptôt nájdeme požadované určujúce prvky hyperboly.

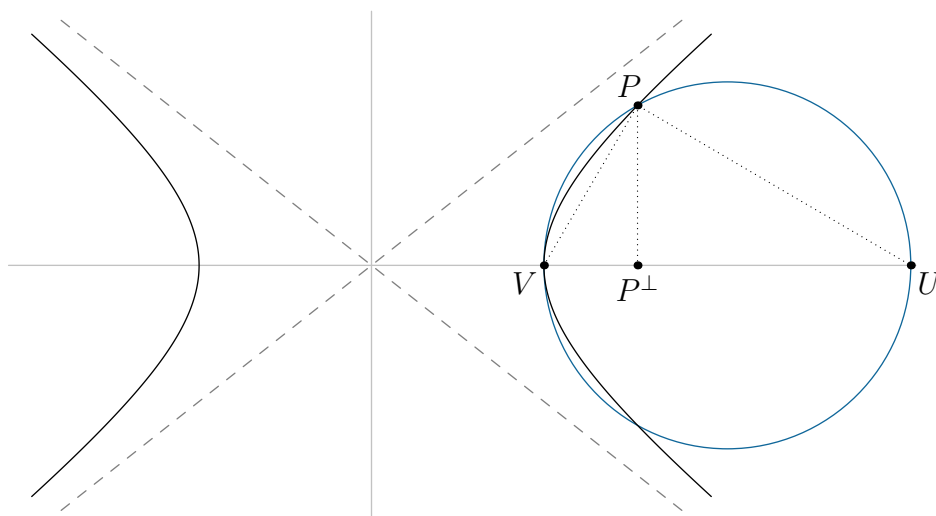
6.3. Vizualizácia hyperboly. Ako v prípade paraboly, aj hyperbolu môžeme vykresliť tak, že s využitím jej metrickej definície skonštruujeme viacero bodov a následne načrtne krivku, ktorá tieto body interpoluje. Ide o tzv. bodovú konštrukciu.

Ako u elipsy a paraboly, aj pri črtaní hyperboly je užitočné poznať polomer oskulačnej kružnice v jej vrcholoch. Situácia sa výrazne podobá na prípad elipsy.

VETA 5.12.

- (i) Ak a je dĺžka hlavnej a b dĺžka vedľajšej poloosi hyperboly, potom polomer oskulačnej kružnice vrchole tejto hyperboly je b^2/a .
- (ii) Nech S je stred elipsy, A nech je hlavný vrchol a $\triangle SAB$ nech je charakteristický trojuholník hyperboly. Priamka p prechádzajúca bodom B a kolmá na asymptotu $\overleftrightarrow{SB}$ pretína os $\overleftrightarrow{SA}$ v strede oskulačnej kružnice vo vrchole A .

Dôkaz. (i) Pre nájdenie polomeru oskulačnej kružnice vo vrchole hyperboly použijeme jej analytické vyjadrenie.



Nech sa kružnica so stredom na hlavnej osi hyperboly dotýka hyperboly v jej vrchole a nech pretína túto vetvu hyperboly v ďalších dvoch podľa osi súmerných bodoch. Pre priesečník $P = (x, y)$ kružnice s polomerom r a hyperboly potom platí, že

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

keďže ide o bod hyperboly, a tiež platí, že

$$\frac{y}{x-a} = \frac{2r - (x-a)}{y},$$

lebo kružnica je Tálesovou kružnicou nad VU , a tak sú trojuholníky $\triangle VP^\perp P$ a $\triangle PP^\perp U$ podobné. Z druhej rovnosti vyjadríme y a po dosadení do prvej a malej úprave dostávame

$$(x-a) \left(\frac{x+a}{a^2} - \frac{2r-x+a}{b^2} \right) = 0.$$

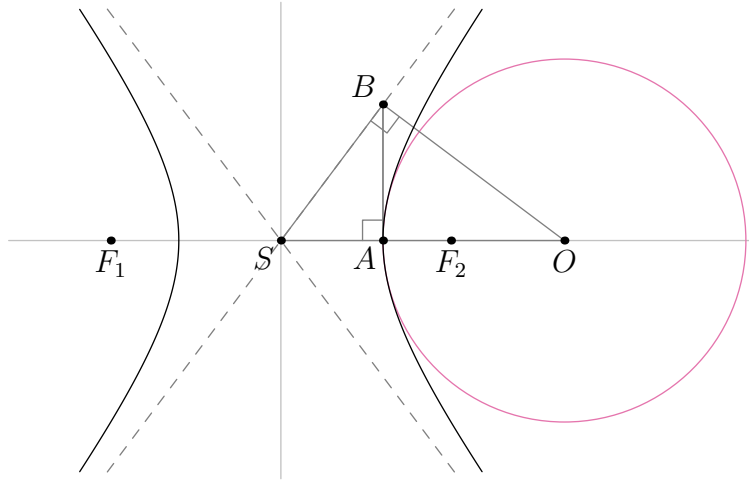
Riešenie $x = a$ nateraz ignorujeme, keďže nás zaujíma podmienka pre polomer r . Dostávame tak, že

$$\frac{x+a}{a^2} - \frac{2r-x+a}{b^2} = 0.$$

Ako sa bod P blíži k vrcholu V , kružnica k sa stáva osculačnou v tomto vrchole a v limite, keď $P = V$, a teda $x = a$, tak dostaneme polomer osculačnej kružnice

$$r = \frac{b^2}{a}.$$

(ii)



Nech O je priesečník $\overleftrightarrow{SA}$ a p . Potom $\triangle OAB$ a $\triangle BAS$ sú podobné a preto pre dĺžky ich odvesien platí

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AS|},$$

kde $|AB| = b$, $|AS| = a$. Odtiaľ

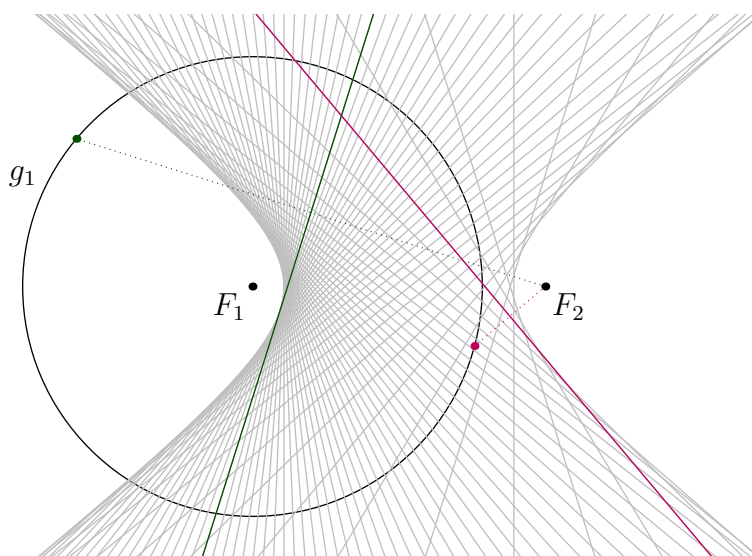
$$|OA| = \frac{b^2}{a},$$

a teda podľa (i) je O stredom osculačnej kružnice vo vrchole A . □

ZADANIE 12. (Hyperbola ako obálka svojich dotyčníc.) Podobne ako parabolu, môžeme aj hyperbolu pomerne efektívne vizualizovať vykreslením jej dotyčníc.

Postup konštrukcie. Nech F_1, F_2 sú ohniská hyperboly a a nech je dĺžka jej hlavnej poloosi. Dotyčnice hyperboly konštruujeme podľa Vety 5.11:

- (1) g_1 ; $g_1(F_1, 2a)$ – riadiaca kružnica hyperboly,
- (2) nech D je ľubovoľný bod na riadiacej kružnici g_1 ,
- (3) t ; t je os F_2D – t je dotyčnica paraboly.



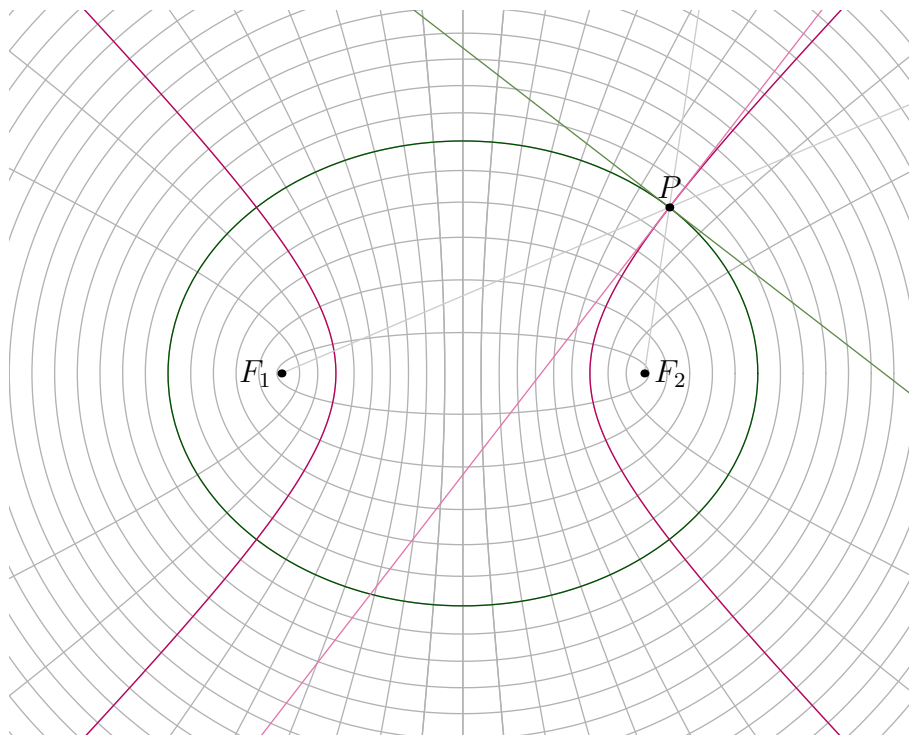
7. Dodatok: konfokálne kuželoščky

Parabola je až na zhodnosť určená parametrom p , t.j. vzdialenosťou ohniska od riadiacej priamky. To znamená, že všetky paraboly s rovnakým parametrom p sú navzájom zhodné. Všetky paraboly až na zhodnosť teda tvoria jednoparametrickú triedu kriviek. Keď namiesto zhodností začneme uvažovať grupu podobností euklidovskej roviny, zistíme, že všetky paraboly sú si navzájom podobné.

Elipsa je naproti tomu určená dvoma parametrami: voľne si môžeme zvoliť napríklad excentricitu e a dĺžku hlavnej poloosi a . Pre elipsy neplatí, že by všetky boli navzájom podobné. Podobné sú si presne tie elipsy, ktoré majú rovnaký pomer veľkostí e a a , teda presne tie elipsy, ktoré majú rovnakú numerickú excentricitu ϵ .

Taká istá situácia ako pre elipsy nastáva aj pri hyperbolách.

Majme teraz pevne zvolenú dvojicu navzájom rôznych bodov F_1 a F_2 . Všetky elipsy, pre ktoré sú tieto dva body jej ohniskami (tzv. **konfokálne** elipsy), tvoria potom už len jednoparametrickú triedu kriviek. Tieto elipsy sú navzájom disjunktné a okrem úsečky F_1F_2 pokrývajú celú rovinu. Analogickú vlastnosť majú aj hyperboly s ohniskami F_1, F_2 . Tieto dve triedy konfokálnych kuželoščiek tak tvoria v rovine akúsi sieť, o ktorej sa navyše s nadobudnutými znalosťami o kuželoščkách vieme už ľahko presvedčiť, že je ortogonálna:



TVRDENIE 5.13. *Nech F_1, F_2 sú navzájom rôzne body. Elipsa s ohniskami F_1, F_2 a hyperbola s ohniskami F_1, F_2 majú v priesečníku navzájom kolmé dotyčnice.*

Dôkaz. Nech P je bod ležiaci na elipse aj hyperbole. Priamky $\overrightarrow{F_1P}$ a $\overrightarrow{F_2P}$ sú sprievodičmi bodu P , či ho chápeme ako bod na elipse alebo ako bod na hyperbole. Vonkajší uhol sprievodičov bodu P vzhľadom na elipsu a vzhľadom na hyperbolu sú navzájom susednými uhlami a preto ich osi, ktoré sú zároveň dotyčnicami elipsy a hyperboly, sú na seba kolmé. $\square$

POZNÁMKA. V degenerovanom prípade, keď by boli body F_1 a F_2 totožné, elipsy by sa stali kružnicami a namiesto hyperbol by sme mali tzv. **singulárne kuželošečky hyperbolického typu**, čiže dvojice rôznobežiek. Krivky vo výslednej sieti, sústredné kružnice a polpriamky so začiatkom v splývajúcich ohniskách, by tak boli množinami bodov, ktoré vzhľadom na polárne súradnice majú jednu zo súradníc konštantnú.

Ak namiesto polárnych súradníc uvažujeme štandardnú karteziánsku súradnicovú sústavu, vidíme, že tá má tú istú vlastnosť, ako sme overili v Tvrdení: krivky pozostávajúce z bodov, ktorých jedna súradnica je konštantná a druhá nadobúda ľubovoľnú hodnotu (t.j. vodorovné a zvislé priamky) tvoria ortogonálnu sieť.

NA ZAMYSLENIE. Vedeli by ste analogickú situáciu namodelovať pomocou parabol? Parabola má na rozdiel od hyperbol a elips iba jedno ohnisko, skúste preto použiť dve jednoparametrické triedy parabol.