UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Martin Samuelčík

BRATISLAVA 2002

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA GEOMETRIE

BÉZIEROVE ŠTVORSTENY V E^4 A ICH APLIKÁCIE

Martin Samuelčík

Diplomová práca

Študijný odbor: Počítačová grafika a geometria
Diplomový vedúci: doc.RNDr.Valentín Zaťko, PhD.

BRATISLAVA 2002

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som napísal túto prácu samostatne len s pomocou diplomového vedúceho a uvedenej literatúry.

V Bratislave dňa ....

....

Poďakovanie

Chcel by som poďakovať doc.RNDr. Valentínovi Zaťkovi, PhD., za jeho ochotnú pomoc a za mnohé cenné rady a pripomienky pri príprave tejto diplomovej práce.

Obsah

Úvod

Cieľom tejto diplomovej práce je bližšie preskúmanie vlastností Bézierovych štvorstenov v štvorrozmernom euklidovskom priestore. Bézierove štvorsteny sú analógiou Bézierovych trojuholníkov z trojrozmerneho euklidovského priestoru a preto prenesieme niektoré idey z Bézierovych trojuholníkov na Bézierove štvorsteny. Zameriame sa hlavne na riešenie spojitosti Bézierovych štvorstenov, ich zovšeobecnenie v podobe racionálnych Bézierovych štvorstenov a na preskúmanie a vizualizáciu Bézierovych telies v trojrozmernom euklidovskom priestore. Tieto telesá tvoria podmnožinu Bézierovych štvorstenov, pretože ich môžeme vnoriť do nadplochy v štvorrozmernom euklidovskom priestore.

V prvej kapitole Bézierov štvorsten zadefinujeme, popíšeme jeho vlastnosti. Ďalej určíme parciálne a smerové derivácie a ich použitím odvodíme podmienku na spojitosť dvoch Bézierovych štvorstenov. Nakoniec sa pozrieme na racionálne Bézierove štvorsteny.

V druhej kapitole sa zameriame na Bézierove telesá. Ukážeme, ako ich vnoriť do štvorrozmerného euklidovského priestoru tak, aby sme ich dostali ako Bézierove štvorsteny. Tym určíme jeho vlastnosti (použitím výsledkov prvej kapitoly) a možeme ho vizualizovať. Ukážeme si aj príklady telies, ktoré je možné vymodelovať pomocou racionálnych Bézierovych štvorstenov.

Na vizualizáciu použijeme grafické rozhranie OpenGL od SGI vo vývojovom prostredí Delphi od Borland Software Corporations. Na spojenie OpenGL a Delphi použijeme komponent GLScene, ktorý bol vydaný pod open-source licenciou Mozilla Public License a ktorého autorom je Mike Lischke.

Kapitola 1

Bézierove štvorsteny v E^4

1.1 Definícia Bézierovych štvorstenov pomocou Casteljauovho algoritmu.

Nech je dané:

- *stupeň* Bézierovho štvorstena, označenie n
- *sieť riadiacich vrcholov* $V_{\mathbf{i}} \in E^4$, kde $\mathbf{i}$ je štvorindex, $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$ $|\,\mathbf{i}\,| = i + j + k + l = n$.
- Nech su dané štyri nekoplanárne body $A, B, C, D \in E^4$. Potom kladieme štvorsten $ABCD$ definičným oborom Bézierovho štvorstena. Ďalej pre bod P štvorstena $ABCD$ uvažujeme štyri reálne čísla u, v, w, t tak, že $P = uA + vB + wC + tD, u + v + w + t = 1$. Túto štvoricu bodov budeme nazývať *barycentrickými súradnicami* bodu P vzhľadom na štvorsten $ABCD$ a označovať $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$.

Zadanú sieť riadiacich vrcholov je možné schematicky zobraziť v tvare štvorstennej štruktúry s vrcholmi v bodoch $V_{(n,0,0,0)}, V_{(0,n,0,0)}, V_{(0,0,n,0)}, V_{(0,0,0,n)}$. Pretože bod P v definícii barycentrických súradníc patrí štvorstenu $ABCD$ a body A, B, C, D sú nekoplanárne, patrí aj nadrovine určenej bodmi A, B, C, D a vektor $P - A$ môžeme napísať ako lineárnu kombináciu vektorov $B - A, C - A, D - A$ z čoho po úprave dostaneme existenciu čísel u, v, w, t. Jednoznačnosť potom vyplýva z nekolineárnosti bodov A, B, C, D.

Podobne môžeme definovať aj barycentrické súradnice vektora $\mathbf{d} \in E^4$ vzhľadom na štvorsten $ABCD$: $\mathbf{d} = (d, e, f, g)$ kde $\mathbf{d} = dA + eB + fC + gD$, $d + e + f + g = 0$.
Teraz môžeme definovať Bézierov štvorsten pomocou Casteljauovho algoritmu:

- majme daný bod P z definičného oboru Bézierovho štvorstena s barycentrickými súradnicami $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$
- označme $V^0_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = V_{\mathbf{i}}$ pre $|\mathbf{i}| = n$ a ďalej označme základné multiindexy

$$\mathbf{e1} = (1,0,0,0),\ \mathbf{e2} = (0,1,0,0),\ \mathbf{e2} = (0,0,1,0),\ \mathbf{e4} = (0,0,0,1)$$

- rekurzívne definujeme:

$$V^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = uV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) \ + vV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e2}}(\mathbf{u}) \ + wV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e3}}(\mathbf{u}) \ + tV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e4}}(\mathbf{u})$$

  pre $r = 1, 2, .., n$; $|\mathbf{i}| = n - r$

- bod *Bézierovho štvorstena* stupňa n so sieťou riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}}$ pre $|\mathbf{i}|=$ n, prislúchajúci parametru $\mathbf{u}$ definujeme ako $V^n_{\mathbf{0}}(\mathbf{u})$ a budeme ho označovať ako $B^n(\mathbf{u})$.

Teraz ukážeme, ako vypočítať barycentrické súradnice bodu E vzhľadom na štvorsten $ABCD$. Najprv určíme reálne čísla e, f, g tak, aby platilo $E - A = e(B - A) + f(C - A) + g(D - A)$. Ide o sústavu štyroch rovníc o troch neznámych. Pretože bod E patrí nadrovine určenej bodmi A, B, C, D, je jedna z týchto rovníc lineárnou kombináciou ostatných a preto ju môžeme vynechať. Cramerovým pravidlom potom dostaneme:

$$e = \frac{\begin{vmatrix} E-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix}} \quad f = \frac{\begin{vmatrix} B-A \\ E-A \\ D-A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix}} \quad g = \frac{\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ E-A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix}}$$

kde do riadkov jednotlivých matíc dosadzujeme tri súradnice daných vektorov, ktoré sme nevynechali. Potom úpravou dostaneme $E = (1-e-f-g)A + eB + fC + gD$, čiže pre u, v, w, t máme: $u = 1-e-f-g,\ v = e,\ w = f,\ t = g$.

Vieme, že dané determinanty nám v trojrozmernom euklidovskom priestore určuje v absolútnej hodnote šesťnásobok objemu (trojrozmernej miery) štvorstena určeného danými bodmi. Podobne je to aj v prípade štvorstenov v štvorrozmernom euklidovskom priestore. Preto môžeme parameter u určiť až na znamienko ako pomer objemov štvorstenov $EBCD$ a $ABCD$. Znamienko u potom určíme podľa polohy E vzhľadom na rovinu BCD. Ak A a E ležia v tom istom polpriestore určenom rovinou BCD, je znamienko u kladné, v opačnom prípade je záporné. Podobne sa dajú určiť aj v, w a t.

1.2 Analytické vyjadrenie Bézierovho štvorstena. Bernsteinove polynómy.

Zovšeobecnené kombinačné číslo $\binom{n}{\mathbf{i}}$ definujeme ako

$$\binom{n}{\mathbf{i}} := \frac{n!}{i!j!k!l!}$$

kde $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$; $|\ \mathbf{i}\ | = i + j + k + l = n$ pre $i, j, k, l \geq 0$. V prípade, že niektoré z čísel i, j, k, l je záporné, kladieme $\binom{n}{\mathbf{i}} = 0$.
Nech $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$ pričom $u+v+w+t = 0$ alebo $u+v+w+t = 1$. Potom *Bernsteinov polynóm* definujeme ako

$$B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k t^l$$

Veta 1.2.1: Platí:

$$B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u}) \ = \ uB_{\mathbf{i-e1}}^{n-1}(\mathbf{u}) \ + \ vB_{\mathbf{i-e2}}^{n-1}(\mathbf{u}) \ + \ wB_{\mathbf{i-e3}}^{n-1}(\mathbf{u}) \ + \ tB_{\mathbf{i-e4}}^{n-1}(\mathbf{u})$$

Dôkaz: Použitím definície Bernsteinovho polynómu na pravú stranu tejto rovnosti dostávame:

$$uB_{\mathbf{i-e1}}^{n-1}(\mathbf{u}) \ + \ vB_{\mathbf{i-e2}}^{n-1}(\mathbf{u}) \ + \ wB_{\mathbf{i-e3}}^{n-1}(\mathbf{u}) \ + \ tB_{\mathbf{i-e4}}^{n-1}(\mathbf{u}) \ =$$

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!l!}u^i v^j w^k t^l + \frac{(n-1)!}{i!(j-1)!k!l!}u^i v^j w^k t^l + \frac{(n-1)!}{i!j!(k-1)!l!}u^i v^j w^k t^l +$$

$$\frac{(n-1)!}{i!j!k!(l-1)!}u^i v^j w^k t^l = \frac{(n-1)!}{i!j!k!l!}u^i v^j w^k t^l (i+j+k+l) =$$

$$\frac{n!}{i!j!k!l!}u^i v^j w^k t^l = B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$$

Veta 1.2.2: Platí

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})$$

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa r.

1. Pre $r = 0$ máme

$$V_{\mathbf{i}}^0 = V_{\mathbf{i}} = \sum_{|\mathbf{j}|=0} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^0(\mathbf{u}) \quad |\ \mathbf{i}\ |= n$$

2. Nech pre r platí

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})$$

   Ukážeme, že platí aj pre r+1. Počítajme z definície:

$$V_{\mathbf{i}}^{r+1}(\mathbf{u}) = uV_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) + vV_{\mathbf{i+e2}}^r(\mathbf{u}) + wV_{\mathbf{i+e3}}^r(\mathbf{u}) + tV_{\mathbf{i+e4}}^r(\mathbf{u}) =$$

$$u\sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i+e1+j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) + v\sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i+e2+j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) + w\sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i+e3+j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) +$$

$$t\sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i+e4+j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) = u\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j-e1}}^r(\mathbf{u}) + v\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j-e2}}^r(\mathbf{u}) +$$

$$w\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j-e3}}^r(\mathbf{u}) + t\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j-e4}}^r(\mathbf{u}) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i+j}} \Big[uB_{\mathbf{j-e1}}^r(\mathbf{u}) + vB_{\mathbf{j-e2}}^r(\mathbf{u}) + wB_{\mathbf{j-e3}}^r(\mathbf{u}) + tB_{\mathbf{j-e4}}^r(\mathbf{u})\Big] =$$

$$= \sum_{|\mathbf{j}|=\mathbf{r+1}} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j}}^{r+1}$$

   kde sme využili **Vetu 1.2.1** a transformáciu multiindexu.

Teraz pre $r = n$ vo **Vete 1.2.2** dostaneme:

$$B^n(\mathbf{u}) = V_{\mathbf{0}}^n = \sum_{|\mathbf{j}|=n} V_{\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{u})$$

čím sme dostali analytické vyjadrenie Bézierovho štvorstena.

Veta 1.2.3: Pre $\forall n \in N,\ \mathbf{u} = (u, v, w, t)$ platí:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = (u + v + w + t)^n$$

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa n :

1. Pre $n = 0$ dostaneme:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=\mathbf{0}} B^n_{\mathbf{0}}(\mathbf{u}) = (u+v+w+t)^0 = (u+v+w+t)^n$$

2. Nech rovnosť platí pre n. Ukážeme, že platí aj pre $n+1$ .Použijeme pri tom **Vetu 1.2.1** :

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \Big[uB^n_{\mathbf{i-e1}}(\mathbf{u}) + vB^n_{\mathbf{i-e2}}(\mathbf{u}) + wB^n_{\mathbf{i-e3}}(\mathbf{u}) +$$

$$+ tB^n_{\mathbf{i-e4}}(\mathbf{u}) \Big] = u \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} B^n_{\mathbf{i-e1}}(\mathbf{u}) \; + v \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} B^n_{\mathbf{i-e2}}(\mathbf{u}) +$$

$$+ w \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} B^n_{\mathbf{i-e3}}(\mathbf{u}) + t \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} B^n_{\mathbf{i-e4}}(\mathbf{u}) =$$

$$= u \sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + v \sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + +w \sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + t \sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) =$$

$$= (u+v+w+t) \sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = (u+v+w+t)^{n+1}$$

Veta 1.2.4: Platí:

$$u = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{i}{n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

a analogicky pre v, w, t:

$$v = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{j}{n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}), \quad w = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{k}{n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}), \quad t = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{l}{n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

kde $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$ je multiindex a $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$.

Dôkaz: Postupne upravíme sumu v dokazovanej rovnosti použitím definície Bersteinovho polynómu:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{i}{n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n, i\neq 0} \frac{i}{n} \frac{n!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l = u \sum_{|\mathbf{i}|=n, i\neq 0} \frac{(n-1)!}{(i-1!)j!k!l!} u^{i-1} v^j w^k t^l$$

Transformáciou multiindexu $\mathbf{i}$ a aplikovaním **Vety 1.2.3** dostaneme:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{i}{n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = u \sum_{|\mathbf{i}|=n-1} B^{n-1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = u$$

1.3 Vlastnosti Bézierovych štvorstenov.

Veta 1.3.1: Bézierov štvorsten je afinne invariantný, t.j. ak A je afinná transformacia, potom

$$A\Big(\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big) \;=\; \sum_{|\mathbf{i}|=n} A(V_{\mathbf{i}}) B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Dôkaz: Podľa **Vety 1.2.2** môžeme $B^n(\mathbf{u})$ vyjadriť ako $\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$, t.j. ako lineárnu kombináciu bodov $V_{\mathbf{i}}$. A podľa **Vety 1.2.3** je $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = 1$. Čiže $B^n(\mathbf{u})$ môžeme vyjadriť ako barycentrickú kombináciu bodov $V_{\mathbf{i}}$. Keďže afinná transformácia zachováva barycentrickú kombináciu bodov, je Bézierov štvorsten $B^n(\mathbf{u})$ afinne invariantný.

Veta 1.3.2: Pre každé $\mathbf{u}$ z definičného oboru Bézierovho štvorstena patrí $B^n(\mathbf{u})$ do konvexného obalu bodov $V_{\mathbf{i}}$, $|\,\mathbf{i}\,| = n$.
Dôkaz: Pretože podľa **Vety 1.2.2** je $B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$ a pre každé $\mathbf{u}$ z definičného oboru je $B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \geq 0$ ($\binom{n}{\mathbf{i}} \geq 0$ a aj u, v, w, t sú nezáporné), potom je $B^n(\mathbf{u})$ konvexnou kombináciou bodov $V_{\mathbf{i}}$, $|\,\mathbf{i}\,| = n$. t.j. $B^n(\mathbf{u})$ patrí do konvexného obalu bodov $V_{\mathbf{i}}$, $|\,\mathbf{i}\,| = n$.

Veta 1.3.3: Rohové body Bézierovho štvorstena sú totožné s rohovými bodmi riadiacej siete, t.j. body $V_{(n,0,0,0)}, V_{(0,n,0,0)}, V_{(0,0,n,0)}, V_{(0,0,0,n)}$ patria Bézierovmu štvorstenu $B^n(\mathbf{u})$.
Dôkaz: Ak máme daný definičný obor $ABCD$ Bézierovho štvorstena $B^n(\mathbf{u})$, môžeme z neho vybrať práve body A, B, C, D. Tieto majú vzhľadom na štvorsten $ABCD$ barycentrické súradnice $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0),$ $(0, 0, 0, 1)$. Keď tieto súradnice dosadíme za $\mathbf{u}$ v rovnosti $B^n(\mathbf{u}) =$ $= \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$, dostaneme $B^n((1, 0, 0, 0)) = V_{(n,0,0,0)}, B^n((0, 1, 0, 0)) = V_{(0,n,0,0)}, B^n((0, 0, 1, 0)) = V_{(0,0,n,0)}, B^n((0, 0, 0, 1)) = V_{(0,0,0,n)}$, čo bolo treba ukázať.

Veta 1.3.4: Hraničné plochy Bézierovho štvorstena sú Bézierove trojuholníky, hraničné krivky sú Bézierove oblúky.
Dôkaz: Hraničné plochy Bézierovho štvorstena dostaneme vtedy, ak za $\mathbf{u}$ berieme súradnice v tvare $(0, v, w, t), (u, 0, w, t), (u, v, 0, t), (u, v, w, 0)$.

Preberieme prípad $\mathbf{u} = (0, v, w, t)$:

$$B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}((0, v, w, t)) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} \binom{n}{\mathbf{i}} 0^i v^j w^k t^l = \sum_{\substack{|\mathbf{i}|=n \\ i=0}} V_{\mathbf{i}} \binom{n}{\mathbf{i}} v^j w^k t^l = \sum_{|\mathbf{j}|=n} V_{\mathbf{j}} \binom{n}{\mathbf{j}} v^j w^k t^l$$

kde $\mathbf{j} = (j, k, l)$ a $v + w + t = 1$. Takto sme dostali vyjadrenie pre jednu hraničnú plochu. Z jej analytického vyjadrenia vidíme, že táto plocha je Bézierova. Podobne sa určia aj ostatné tri hraničné plochy.
Analogicky pre hraničné krivky. Tieto krivky dostaneme dosadením nasledovných súradníc za $\mathbf{u}$:
$(0, 0, w, t), (0, v, 0, t), (0, v, w, 0), (u, 0, 0, t), (u, 0, w, 0), (u, v, 0, 0)$
Preskúmaním prípadu $\mathbf{u} = (0, 0, w, t)$ by sme dospeli k analytickému vyjadreniu tejto hraničnej krivky:

$$B^n((0, 0, w, t)) = \sum_{|\mathbf{j}|=n} V_{\mathbf{j}} \binom{n}{\mathbf{j}} w^k t^l \quad \mathbf{j} = (k, l), w + t = 1$$

čo je analytické vyjadrenie Bézierovho oblúka. Podobne pre ostatných päť hraničných kriviek.

Veta 1.3.5: Bézierov štvorsten je v premennej $\mathbf{u}$ polynomická funkcia stupňa n. Je však možné zapísť takýto Bézierov štvorsten ako Bézierov štvorsten stupňa $n + 1$:

$$B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

kde $W_{\mathbf{i}} = \frac{i}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}} + \frac{j}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e2}} + \frac{k}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e3}} + \frac{l}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e4}}$ pre $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$, $i + j + k + l = n + 1$.
Dôkaz: Prvá časť vety priamo vyplýva z analytického vyjadrenia Bézierovho štvorstena podľa **Vety 1.2.2**. Druhú časť ukážeme dokázaním rovnosti $\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$. Platí:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \Big[\frac{i}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}} + \frac{j}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e2}} + \frac{k}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e3}} +$$

$$\frac{l}{n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e4}}\Big] \frac{(n+1)!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l = u \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}} B^n_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) +$$

$$v\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i-e2}}B^n_{\mathbf{i-e2}}(\mathbf{u}) + w\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i-e3}}B^n_{\mathbf{i-e3}}(\mathbf{u}) + t\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i-e4}}B^n_{\mathbf{i-e4}}(\mathbf{u})$$

Transformáciou parametrov v jednotlivých sumách dostaneme:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}}B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = (u+v+w+t)\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

1.4 Parciálne a smerové derivácie.

Majme dva body F, G z definičného oboru Bézierovho štvorstena. Tieto dva body určujú vektor $\mathbf{d} = F - G$ s barycentrickými súradnicami (d, e, f, g) ; $d + e + f + g = 0$. Potom deriváciu štvorstena $B^n(\mathbf{u})$ v smere vektora d definujeme ako

$$D_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u}B^n(\mathbf{u}) + e\frac{\partial}{\partial v}B^n(\mathbf{u}) + f\frac{\partial}{\partial w}B^n(\mathbf{u}) + g\frac{\partial}{\partial t}B^n(\mathbf{u})$$

kde $\frac{\partial}{\partial u}B^n(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial v}B^n(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial w}B^n(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial t}B^n(\mathbf{u})$ sú parciálne derivácie Bézierovho štvorstena. Pomocou analytického vyjadrenia Bézierovho štvorstena sa tieto parciálne derivácie dajú vyjadriť pomocou parciálnych derivácií Bernsteinových polynómov:

$$\frac{\partial}{\partial u}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial u}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial v}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial v}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

$$\frac{\partial}{\partial w}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial w}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial t}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial t}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Ak definujeme

$$\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u}) = \frac{\partial^{|\mathbf{i}|}}{\partial u^i \partial v^j \partial w^k \partial t^l}B^n(\mathbf{u}) \qquad \mathbf{i} = (i,j,k,l)$$

potom môžeme prvú smerovú deriváciu napísať aj ako

$$D_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = D^1_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=1} \partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^1_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})$$

Ďalej môžeme rekurzívne definovať *smerovú deriváciu r-tého rádu*:

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u}D^{r-1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) \;+\; e\frac{\partial}{\partial v}D^{r-1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) \;+\; f\frac{\partial}{\partial w}D^{r-1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) +$$

$$+ g\frac{\partial}{\partial t} D_{\mathbf{d}}^{r-1} B^n(\mathbf{u})$$

Veta 1.4.1: Platí:

$$D_{\mathbf{d}}^{r} B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d})$$

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa r:

1. Pre $r = 1$ vyplýva tvrdenie z definície

2. Nech tvrdenie platí pre nejaké r , $1 \leq r \leq n-1$. Ukážeme, že platí aj pre $r+1$. Použijeme definíciu smerovej derivácie vyššieho rádu:

$$D_{\mathbf{d}}^{r+1} B^n(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u}\Big[D_{\mathbf{d}}^{r} B^n(\mathbf{u})\Big] + e\frac{\partial}{\partial v}\Big[D_{\mathbf{d}}^{r} B^n(\mathbf{u})\Big] + f\frac{\partial}{\partial w}\Big[D_{\mathbf{d}}^{r} B^n(\mathbf{u})\Big] +$$

$$g\frac{\partial}{\partial t}\Big[D_{\mathbf{d}}^{r} B^n(\mathbf{u})\Big] = d\frac{\partial}{\partial u}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d})\Big] + e\frac{\partial}{\partial v}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d})\Big] +$$

$$+ f\frac{\partial}{\partial w}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d})\Big] + g\frac{\partial}{\partial t}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d})\Big] =$$

$$d\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u})\Big] B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) + e\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial v}\partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u})\Big] B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) +$$

$$f\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial w}\partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u})\Big] B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) + g\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u})\Big] B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) =$$

$$d\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i+e1}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) + e\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i+e2}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) +$$

$$f\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i+e3}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) + g\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i+e4}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) =$$

$$d\sum_{|\mathbf{i}|=r+1} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i-e1}}^r(\mathbf{d}) + e\sum_{|\mathbf{i}|=r+1} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i-e2}}^r(\mathbf{d}) +$$

$$f\sum_{|\mathbf{i}|=r+1} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i-e3}}^r(\mathbf{d}) + g\sum_{|\mathbf{i}|=r+1} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i-e4}}^r(\mathbf{d}) =$$

$$\sum_{|\mathbf{i}|=r+1} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u})\Big[dB_{\mathbf{i-e1}}^r(\mathbf{d}) + eB_{\mathbf{i-e2}}^r(\mathbf{d}) + fB_{\mathbf{i-e3}}^r(\mathbf{d}) + gB_{\mathbf{i-e4}}^r(\mathbf{d})\Big]$$

Použitím **Vety 1.2.1** dostaneme:

$$D_{\mathbf{d}}^{r+1} B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=r+1} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B_{\mathbf{i}}^{r+1}(\mathbf{d})$$

Veta 1.4.2: Pre parciálnu deriváciu Bernsteinovho polynómu podľa u platí:

$$\frac{\partial}{\partial u}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = n\Big[B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big]$$

pre $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$, $u + v + w + t = 1$.
Podobne pre ostatné parciálne derivácie platí:

$$\frac{\partial}{\partial v}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = n\Big[B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e2}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big] \ , \ \frac{\partial}{\partial w}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = n\Big[B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e3}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big] \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = n\Big[B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e4}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big]$$

Dôkaz: Nech P z definičného oboru Bézierovho štvorstena má homogénne súradnice U, V, W, T, pričom $U+V+W+T \neq 0$ a jeho barycentrické súradnice sú $[\frac{U}{U+V+W+T}, \frac{V}{U+V+W+T}, \frac{W}{U+V+W+T}, \frac{T}{U+V+W+T}]$ Označme $\xi = U+V+W+T$.
Potom:

$$\frac{\partial}{\partial u}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial U}B^n_{\mathbf{i}}((\frac{U}{\xi}, \frac{V}{\xi}, \frac{W}{\xi}, \frac{T}{\xi},))\Big|_{U+V+W+T=1}$$

Nech $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$, $i + j + k + l = n$. Počítajme:

$$\frac{\partial}{\partial U}B^n_{\mathbf{i}}((\frac{U}{\xi}, \frac{V}{\xi}, \frac{W}{\xi}, \frac{T}{\xi},)) = \frac{\partial}{\partial U}\Big[\binom{n}{\mathbf{i}}\Big(\frac{U}{\xi}\Big)^i\Big(\frac{V}{\xi}\Big)^j\Big(\frac{W}{\xi}\Big)^k\Big(\frac{T}{\xi}\Big)^l\Big] =$$

$$= \binom{n}{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial U}\Big[\frac{1}{\xi^n}U^iV^jW^kT^l\Big] = \binom{n}{\mathbf{i}}\Big[\frac{i}{\xi^n}U^{i-1}V^jW^kT^l - \frac{n}{\xi^{n+1}}U^iV^jW^kT^l\Big]$$

$$= n\Big[\binom{n-1}{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}\frac{U^{i-1}V^jW^kT^l}{\xi^n} - \xi\binom{n}{\mathbf{i}}\frac{U^iV^jW^kT^l}{\xi^n}\Big]$$

$$= n\Big[B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}((\frac{U}{\xi}, \frac{V}{\xi}, \frac{W}{\xi}, \frac{T}{\xi})) - \xi B^n_{\mathbf{i}}((\frac{U}{\xi}, \frac{V}{\xi}, \frac{W}{\xi}, \frac{T}{\xi}))\Big]$$

Teraz pre $\xi = 1$ dostávame:

$$\frac{\partial}{\partial u}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = n\Big[B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big]$$

Analogicky sa dá tvrdenie dokázať aj pre ostatné parciálne derivácie.

Veta 1.4.3: Platí:

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r}B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})B^{n-r}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})$$

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa r:

1. Pre $r=0$ máme

$$B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = D^0_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-0)!} \sum_{|\mathbf{j}|=0} B^0_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) \mathbf{B}^{\mathbf{n-0}}_{\mathbf{i-j}}(\mathbf{u})$$

2. Z definície smerovej derivácie máme:

$$D^{r+1}_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + e\frac{\partial}{\partial v} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + f\frac{\partial}{\partial w} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) +$$

$$g\frac{\partial}{\partial t} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Teraz budeme upravovať len člen $\frac{\partial}{\partial u} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$, ostatné tri členy sa určia analogicky. Použitím indukčného predpokladu dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial u} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-r}_{\mathbf{i-j}}(\mathbf{u}) =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) \frac{\partial}{\partial u} B^{n-r}_{\mathbf{i-j}}(\mathbf{u})$$

Použijeme **Vetu 1.4.2**:

$$\frac{\partial}{\partial u} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) (n-r) \left[B^{n-r-1}_{\mathbf{i-j-e1}}(\mathbf{u}) - B^{n-r}_{\mathbf{i-j}}(\mathbf{u}) \right] =$$

$$\frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-r-1}_{\mathbf{i-j-e1}}(\mathbf{u}) - (n-r) \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-r}_{\mathbf{i-j}}(\mathbf{u})$$

Použitím indukčného predpokladu dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial u} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-r-1}_{\mathbf{i-j-e1}}(\mathbf{u}) - (n-r) D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Podobne aj pre ostatné parciálne derivácie:

$$\frac{\partial}{\partial v} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-r-1}_{\mathbf{i-j-e2}}(\mathbf{u}) - (n-r) D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

$$\frac{\partial}{\partial w} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-r-1}_{\mathbf{i-j-e3}}(\mathbf{u}) - (n-r) D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-r-1}_{\mathbf{i-j-e4}}(\mathbf{u}) - (n-r) D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Pretože máme určené parciálne derivácie $D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$, môžeme určiť $D^{r+1}_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$:

$$D^{r+1}_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + e\frac{\partial}{\partial v} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + f\frac{\partial}{\partial w} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) +$$

$$+g\frac{\partial}{\partial t}D^r_{\mathbf{d}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!}\Big[d\sum_{|\mathbf{j}|=r}B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u})+$$

$$e\sum_{|\mathbf{j}|=r}B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{e2}}(\mathbf{u})+f\sum_{|\mathbf{j}|=r}B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{e3}}(\mathbf{u})+$$

$$g\sum_{|\mathbf{j}|=r}B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{e4}}(\mathbf{u})\Big]-(n-r)(d+e+f+g)D^r_{\mathbf{d}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Vieme, že $d+e+f+g=0$. V jednotlivých sumách transformujeme premennú $\mathbf{j}+\mathbf{e1}$ na $\mathbf{j}$ v prvej sume, $\mathbf{j}+\mathbf{e2}$ na $\mathbf{j}$ v druhej sume, $\mathbf{j}+\mathbf{e3}$ na $\mathbf{j}$ v tretej sume a $\mathbf{j}+\mathbf{e4}$ na $\mathbf{j}$ v štvrtej sume. Dostaneme:

$$D^{r+1}_{\mathbf{d}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!}\Big[d\sum_{|\mathbf{j}|=r+1}B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e1}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})+$$

$$e\sum_{|\mathbf{j}|=r+1}B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e2}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})+f\sum_{|\mathbf{j}|=r+1}B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e3}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})+$$

$$g\sum_{|\mathbf{j}|=r+1}B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e4}}(\mathbf{d})B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})\Big] = \frac{n!}{(n-(r+1))!}\sum_{|\mathbf{j}|=r+1}B^{n-(r+1)}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u}).$$

$$\Big[dB^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e1}}(\mathbf{d})+eB^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e2}}(\mathbf{d})+fB^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e3}}(\mathbf{d})+gB^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e4}}(\mathbf{d})\Big]$$

Použitím **Vety 1.2.1** dostaneme:

$$D^{r+1}_{\mathbf{d}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!}\sum_{|\mathbf{j}|=r+1}B^{r+1}_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})B^{n-(r+1)}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})$$

Tým sme dokázali požadované.

Veta 1.4.4: Pre $r-$tú smerovú deriváciu Bézierovho štvorstena $B^n(\mathbf{u})$ platí:

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r}B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})V^{n-r}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}) =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=n-r}B^{n-r}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u})V^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})$$

Dôkaz: Platí:

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = D^r_{\mathbf{d}}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=n}V_{\mathbf{i}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big] = \sum_{|\mathbf{i}|=n}V_{\mathbf{i}}D^r_{\mathbf{d}}B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Pomocou **Vety 1.4.3** dostaneme:

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n}V_{\mathbf{i}}\Big[\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r}B^{n-r}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})\Big] =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r}\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^{n-r}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})$$

Oznacme $\mathbf{k} := \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Potom:

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r}\sum_{|\mathbf{k}|=n-r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) \sum_{|\mathbf{k}|=n-r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) V^{n-r}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u})$$

V poslednej rovnosti sme využili **Vetu 1.2.2**. Podobnou úpravou dostaneme druhú dokazovanú rovnosť:

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{j}|=r}\sum_{|\mathbf{k}|=n-r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{k}|=n-r} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{k}|=n-r} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) V^r_{\mathbf{k}}(\mathbf{d})$$

Keď teraz položíme $r = 1$, dostaneme:

$$D^1_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = n\sum_{|\mathbf{j}|=1} B^1_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) V^{n-1}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}) = dV^{n-1}_{\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) + eV^{n-1}_{\mathbf{e2}}(\mathbf{u}) + fV^{n-1}_{\mathbf{e3}}(\mathbf{u}) + gV^{n-1}_{\mathbf{e4}}(\mathbf{u})$$

Teda každá prvá smerová derivácia Bézierovho štvorstena je barycentrickou kombináciou bodov $V^{n-1}_{\mathbf{e1}}(\mathbf{u}), V^{n-1}_{\mathbf{e2}}(\mathbf{u}), V^{n-1}_{\mathbf{e3}}(\mathbf{u}), V^{n-1}_{\mathbf{e4}}(\mathbf{u})$. Preto každý vektor prvej smerovej derivácie leží v nadrovine určenej danými štyrmi bodmi. Táto nadrovina sa nazýva *dotykovou*. Jej analytický zápis môžeme formálne vyjadriť v tvare determinantu:

$$\begin{vmatrix} x \quad y \quad z \quad t \\ V^{n-1}_{\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) \\ V^{n-1}_{\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) \\ V^{n-1}_{\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) \end{vmatrix} = 0$$

Skúmajme teraz hranicu Bézierovho štvorstena, ktorú dostaneme pre $u = 0$. Majme daný vektor $\mathbf{d} = (d, e, f, g)$ nie rovnobežný s touto hranicou, t.j. vektor, pre ktorý je $d \neq 0$. Potom definujeme *deriváciu v smere priečnom k danej hranici* v hraničnom bode nasledovne:

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u})\Big|_{u=0} = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{i}|=n-r} B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) V^{n-r}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big|_{u=0} =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mathbf{i_0}|=n-r} B^r_{\mathbf{i_0}}(\mathbf{d})V^{n-r}_{\mathbf{i_0}}(\mathbf{u})$$

kde $\mathbf{i_0} = (0, j, k, l)$

1.5 C-spojitosť Bézierovych štvorstenov.

V tejto časti sa budeme zaoberať spojitým spojením Bézierovych štvorstenov. Pre jednoduchosť skúmame iba spojitosť dvoch štvorstenov.
Majme dané dva Bézierove štvorsteny $B^n(\mathbf{u})$ a $C^n(\mathbf{v})$ rovnakého stupňa n. Bézierov štvorsten $B^n(\mathbf{u})$ má definičný obor štvorsten $ABCD$, sieť riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}}$, $\mid \mathbf{i} \mid= n$. Bézierov štvorsten $C^n(\mathbf{v})$ má definičný obor štvorsten $EBCD$, sieť riadiacich vrcholov $W_{\mathbf{i}}$, $\mid \mathbf{i} \mid= n$.
Majme tiež daný vektor priečny k hranici BCD, ktorý má vzhľadom na $ABCD$ barycentrické súradnice $\mathbf{d}$ a vzhľadom na $EBCD$ barycentrické súradnice $\mathbf{e}$. Potom sú dva Bézierove štvorsteny $B^n(\mathbf{u})$ a $C^n(\mathbf{v})$ C^s *spojité* (*spojité s-tého rádu*) na hranici BCD práve vtedy, keď $D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = D^r_{\mathbf{d}}C^n(\mathbf{v})$ pre $r = 1, .., s$ a $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ sú barycentrické súradnice hraničného bodu vzhľadom na štvorsten $ABCD$ resp. štvorsten $ABCE$. Daná definícia nám hovorí, že každá smerová derivácia v ľubovoľnom smere priečnom k spoločnej hranici musí byť pre oba Bézierove štvorsteny zhodná.
Našim cieľom bude teraz určiť $W_{\mathbf{i}}$ pomocou $V_{\mathbf{i}}$ tak, aby $B^n(\mathbf{u})$ a $C^n(\mathbf{v})$ boli C^s spojité.

Veta 1.5.1: Nutnou podmienkou pre C^s spojitosť $B^n(\mathbf{u})$ a $C^n(\mathbf{v})$ na hranici BCD je:

$$W_{(r,j,k,l)} = V^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{w}) \quad \mathbf{j} = (0, j, k, l);\ j + k + l = n - r;\ r = 0, ..., s$$

kde $\mathbf{w}$ sú barycentrické súradnice bodu E vzhľadom na štvorsten $ABCD$.
Dôkaz: Najprv dokážeme nutnosť podmienky. Z definície musí pre každý bod hranice a pre každý vektor nie rovnobežný s danou hranicou platiť:

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = D^r_{\mathbf{d}}C^n(\mathbf{v}) \quad r = 1, .., s$$

kde $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ sú barycentrické súradnice hraničného bodu vzhľadom na $ABCD$ resp. $ABCE$ a $\mathbf{d}$ resp. $\mathbf{e}$ sú barycentrické súradnice vektora vzhľadom na $ABCD$ resp. $ABCE$. Teraz nech $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Aplikovaním **Vety 1.4.4** dostaneme:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n-r} V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i}}^{n-r}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n-r} W_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{e}) B_{\mathbf{i}}^{n-r}(\mathbf{v}) \qquad r = 0, ..., s$$

Pretože bod prislúchajúci parametrom $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ patrí hranici BCD a táto hranica je spoločná pre oba štvorsteny $ABCD, EBCD$, je $u_1 = 0, v_1 = 0$ a $u_2 = v_2, u_3 = v_3, u_4 = v_4$ t.j. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Aby sme zo sumy vylúčili nulové členy, položíme $\mathbf{i} = (0, j, k, l)$. Potom porovnaním koeficientov máme:

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d}) = W_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{e}) \qquad r = 0, ..., s$$

Majme teraz ľubovoľný bod s barycentickými súradnicami $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ vzhľadom na $ABCD$ resp. $EBCD$. Podľa **Vety 1.2.2** sú $V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{d})$ a $W_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{e})$ polynómy stupňa r nad sieťou riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}}$ resp. $W_{\mathbf{i}}$. Pretože medzi $\mathbf{d}$ a $\mathbf{e}$ je taký istý vzťah, ako medzi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, platí aj

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = W_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{v}) \qquad r = 0, ..., s$$

Keď teraz položíme $\mathbf{v} = \mathbf{e1}$, potom $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ a použitím Vety 1.2.2 dostaneme:

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{w}) = W_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{e1}) = \sum_{|\mathbf{j}|=\mathbf{r}} W_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{e1}) = \sum_{|\mathbf{j}|=\mathbf{r}} W_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} \frac{r!}{j_1! j_2! j_3! j_4!} 1^{j_1} 0^{j_2} 0^{j_3} 0^{j_4}$$

kde $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3, j_4)$. Jediný nenulový člen v sume dostaneme pre $\mathbf{j} = (r, 0, 0, 0)$. Potom:

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{w}) = W_{\mathbf{i}+(r,0,0,0)} = W_{(r,j,k,l)}$$

pretože $\mathbf{i}$ má tvar $(0, j, k, l)$. Tým sme vetu dokázali.

Dá sa ukázať, že daná podmienka je aj postačujúca pre spojitosť s-tého rádu dvoch Bézierovych štvorstenov.

Predchádzajúca veta nám hovorí, že pre spojitosť s-tého rádu sú dôležité len vrcholy ktoré majú prvú súradnicu multiindexu maximálne s, t.j ich "vzdialenosť" od skúmanej hranice je maximálne s. Pre s=0 takto dostaneme, že oba Bézierove štvorsteny musia mať spoločnú sieť riadiacich vrcholov pozdĺž spoločnej hranice.

1.6 Modelovanie a vizualizácia Bézierovych štvorstenov.

V tejto časti sa zameriame na základné postupy modelovania Bézierovych štvorstenov v E^4.

1.6.1 Generovanie siete interpolačných štvorstenov

V tejto metóde sa vypočítavajú hodnoty $B^n(\mathbf{u})$ pomocou Casteljauovho algoritmu alebo z analytického vyjadrenia podľa **Vety 1.2.2**, ale za $\mathbf{u}$ berieme iba vybrané hodnoty. Postup môže byť nasledovný:

1. Zvolíme prirodzené číslo m. Čím väčšie je toto číslo, tým je aproximácia presnejšia.

2. Za $\mathbf{u}$ berieme iba súradnice tvaru (u_1, u_2, u_3, u_4), kde $u_1 = \frac{i_1}{m}; u_2 = \frac{i_2}{m}; u_3 = \frac{i_3}{m}; u_4 = \frac{i_4}{m}$ pre $i_1 = 0,..,m; i_2 = 0,..,m; i_3 = 0,..,m; i_4 = 0,..,m; i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = m$ (aby $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$)

3. Pre takéto hodnoty parametra $\mathbf{u}$ vypočítame $B^n(\mathbf{u})$. Takto získanú sieť bodov Bézierovho štvorstena spojením "susedných" bodov prevedieme na výslednú sieť štvorstenov.

Nevýhodou tejto metódy je väčšia časová náročnosť, pretože pre každý vybraný bod z definičného oboru sa musí vypočítať hodnota $B^n(\mathbf{u})$.

1.6.2 Aproximácia Bézierovho štvorstena pomocou subdivision algoritmu.

Predpokladajme, že vo **Vete 1.5.1** zoberieme vrchol E z vnútra štvorstena $ABCD$ a budeme požadovať C^n spojitosť Bézierových štvorstenov $B^n(\mathbf{u})$ a $C^n(\mathbf{u})$. Pretože Bézierov štvorsten je polynomická funkcia stupňa n, bude potom $C^n(\mathbf{u})$ podmnožinou $B^n(\mathbf{u})$. Podobne pre ostatné tri Bézierove štvorsteny, ktoré dostaneme skúmaním C^n spojitosti na hraniciach ABC, ABD, ACD. Takýmto spôsobom sme pôvodný Bézierov štvorsten rozdelili na štyri Bézierove štvorsteny so svojimi vlastnými sieťami riadiacich vrcholov. Takto môžeme rekurzívne postupovať až kým sieť riadiacich vrcholov nie je dostatočne malá. Rekurzívny postup je nasledovný:

1. Ak je sieť riadiacich vrcholov dostatočne malá, vykresli ju ako jeden bod.

2. Vyber jeden bod z vnútra definičného oboru Bézierovho štvorstena (napr. ťažisko) s barycentrickými súradnicami $\mathbf{w}$.

3. Vypočítaj nové riadiace vrcholy pre štyri nové Bézierove štvorsteny nasledovne:

$$W^1_{(r,j,k,l)} = V^r_{(0,j,k,l)}(\mathbf{w}) \quad r = 0,..,n\ ;\ j+k+l = n-r$$
$$W^2_{(i,r,k,l)} = V^r_{(i,0,k,l)}(\mathbf{w}) \quad r = 0,..,n\ ;\ i+k+l = n-r$$
$$W^3_{(i,j,r,l)} = V^r_{(i,j,0,l)}(\mathbf{w}) \quad r = 0,..,n\ ;\ i+j+l = n-r$$
$$W^4_{(i,j,k,r)} = V^r_{(i,j,k,0)}(\mathbf{w}) \quad r = 0,..,n\ ;\ i+j+k = n-r$$

   kde $W^m_{\mathbf{i}}$ sú riadiace vrcholy m-tého nového Bézierovho štvorstena, $m = 1, 2, 3, 4$.

4. Pre každý nový Bézierov štvorsten opakuj bod 1.

Týmto postupom budeme dostávať stále jemnejšiu sieť Bézierovych štvorstenov, ktoré dokopy vytvárajú aproximáciu modelovaného Bézierovho štvorstena. Výhodou je, že rekurziu môžeme kedykoľvek zastaviť ak sme spokojný aj s medzivýsledkom.

1.6.3 Vizualizácia

Pri vizualizácii sa stretávame s problémom premietania zo štvorrozmerného priestoru do dvojrozmerného. Vyriešime to tak, že najprv budeme premietať zo štvorrozmerného do trojrozmerného priestoru a potom z trojrozmerného priestoru do dvojrozmerného. Budeme premietať dvojakým spôsobom - rovnobežným kolmým premietaním a perspektívou.
Pre rovnobežné kolmé premietanie z E^4 do E^3 máme v E^4 definovanú nadrovinu ϕ, do ktorej budeme premietať. Nech táto nadrovina ϕ má analytické vyjadrenie $ax+by+cz+dt = 0$. Potom smer premietania je vektor (a, b, c, d). Ak teraz máme bod $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in E^4$, premietací lúč má parametrické vyjadrenie $x = x_0 + pa,\ y = y_0 + pb,\ z = z_0 + pc,\ t = t_0 + pd$ pre $p \in R$. Priesečník lúča s nadrovinou ϕ má potom súradnice $Q = [x_0 - a\frac{ax_0+by_0+cz_0+dt_0}{a^2+b^2+c^2+d^2}$,

$y_0 - b\frac{ax_0+by_0+cz_0+dt_0}{a^2+b^2+c^2+d^2},\ z_0 - c\frac{ax_0+by_0+cz_0+dt_0}{a^2+b^2+c^2+d^2},\ t_0 - d\frac{ax_0+by_0+cz_0+dt_0}{a^2+b^2+c^2+d^2}]$ Teraz stačí zaviesť v nadrovine ϕ ortonormálnu bázu $(O, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ súhlasne orientovanú s ortonormálnou bázou v E^3. Rovnice premietania sú potom nasledovné:

$$X = (\,Q - O\,)\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{f}\\ \mathbf{g}\end{pmatrix}$$

kde v prvej matici sú súradnice vektora v stĺpci a v druhej matici v riadku.
V prípade perspektívy z E^4 do E^3 máme danú nadrovinu ϕ do ktorej premietame a bod $P = [p, q, r, s]$ z ktorého premietame, $P \notin \phi$. Ak máme ľubovoľný bod $[x_0, y_0, z_0, t_0] \in E^4$, premietací lúč má parametrické vyjadrenie $x = p + m(p - x_0),\ y = q + m(q - y_0),\ z = r + m(r - z_0),\ t = s + m(s - t_0),$ pre $m \in R$. Priesečník tohto lúča s nadrovinou ϕ je potom bod $Q = [p - (p - x_0)m_0,\ q - (q - y_0)m_0,\ r - (r - z_0)m_0,\ s - (s - t_0)m_0]$ kde $m_0 = \frac{ap+bq+cr+ds}{ap+bq+cr+ds-ax_0-by_0-cz_0-dt_0}$. Aby sme nedelili nulou, musí byť $ap + bq + cr + ds - ax_0 - by_0 - cz_0 - dt_0 \neq 0$, t.j. daný bod P nesmie ležať v nadrovine, ktorá vznikne z ϕ posunutím do bodu P. Ďalej postupujeme ako v predchádzajúcom prípade.
Premietanie z E^3 do E^2 sa určí takým istým spôsobom ako premietanie z E^4 do E^3, pričom každý bod a vektor majú o jednu súradnicu menej.

1.7 Racionálne Bézierove štvorsteny.

Majme daný definičný obor Bézierovho štvorstena a sieť riadiacich vrcholov. Naviac pre každý bod $V_{\mathbf{i}}$ siete riadiacich vrcholv majme daný parameter $w_{\mathbf{i}} \in R$. Tento parameter budeme nazývať *váhou* daného bodu. Aby racionálny Bézierov štvorsten ležal v konvexnom obale riadiacich bodov, kladieme $w_{\mathbf{i}} \geq 0$. Potom pre ľubovoľné $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$ z definičného oboru Bézierovho štvorstena určíme racionálnym Casteljauovým algoritmom bod $B^n(\mathbf{u})$ racionálneho Bézierovho štvorstena:

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \frac{1}{w_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u})}\Big[uw_{\mathbf{i+e1}}^{r-1}(\mathbf{u})V_{\mathbf{i+e1}}^{r-1}(\mathbf{u}) + vw_{\mathbf{i+e2}}^{r-1}(\mathbf{u})V_{\mathbf{i+e2}}^{r-1}(\mathbf{u}) + ww_{\mathbf{i+e3}}^{r-1}(\mathbf{u})V_{\mathbf{i+e3}}^{r-1}(\mathbf{u}) +$$

$$tw_{\mathbf{i+e4}}^{r-1}(\mathbf{u})V_{\mathbf{i+e4}}^{r-1}(\mathbf{u})\Big] \qquad r = 1, .., n; \mid \mathbf{i} \mid = n - r$$

kde $w_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u})$ je rekurzívne definované ako:

$$w_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = uw_{\mathbf{i+e1}}^{r-1}(\mathbf{u})+vw_{\mathbf{i+e2}}^{r-1}(\mathbf{u})+ww_{\mathbf{i+e3}}^{r-1}(\mathbf{u})+tw_{\mathbf{i+e4}}^{r-1}(\mathbf{u}) \quad r = 1,..,n; \mid \mathbf{i} \mid = n-r$$

pričom $w_{\mathbf{i}}^0(\mathbf{u}) = w_{\mathbf{i}}$. Bod racionálneho Bézierovho štvorstena $B^n(\mathbf{u})$ je potom definovaný ako $V_{\mathbf{0}}^n(\mathbf{u})$. Teraz analogicky ako pre obyčajný Bézierov štvorsten určíme analytické vyjadrenie racionálneho Bézierovho štvorstena.

Veta 1.6.1: Pre analytické vyjadrenie racionálneho Bézierovho štvorstena platí:

$$B^n(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}$$

Dôkaz: Podobne, ako v prípade obyčajného Bézierovho štvorstena najprv ukážeme, že

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{|\mathbf{j}|=r} w_{\mathbf{i+j}} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{j}|=r} w_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})}$$

Dokazovaný výraz potom dostaneme pre $r = n$.
Matematickou indukciou podľa r máme:

1. Pre $r = 1$ platí:

$$V_{\mathbf{i}}^1(\mathbf{u}) = \frac{uw_{\mathbf{i+e1}} V_{\mathbf{i+e1}} + vw_{\mathbf{i+e2}} V_{\mathbf{i+e2}} + ww_{\mathbf{i+e3}} V_{\mathbf{i+e3}} + tw_{\mathbf{i+e4}} V_{\mathbf{i+e4}}}{uw_{\mathbf{i+e1}} + vw_{\mathbf{i+e2}} + ww_{\mathbf{i+e3}} + tw_{\mathbf{i+e4}}} =$$

$$\frac{\sum_{|\mathbf{j}|=1} w_{\mathbf{i+j}} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j}}^1(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{j}|=1} w_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j}}^1(\mathbf{u})} \qquad \mid \mathbf{i} \mid = n-1$$

2. Nech daná rovnosť platí pre $r \in N$. Ukážeme, že platí aj pre $r + 1$.Počítajme:

$$V_{\mathbf{i}}^{r+1} = \frac{1}{w_{\mathbf{i}}^{r+1}} \Big[uw_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) + vw_{\mathbf{i+e2}}^r(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e2}}^r(\mathbf{u}) +$$

$$ww_{\mathbf{i+e3}}^r(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e3}}^r(\mathbf{u}) + tw_{\mathbf{i+e4}}^r(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e4}}^r(\mathbf{u}) \Big]$$

Sústredíme sa na člen $uw_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u})$. Z predpokladu:

$$uw_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) = uw_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) \frac{\sum_{|\mathbf{j}|=r} w_{\mathbf{i+j+e1}} V_{\mathbf{i+j+e1}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{j}|=r} w_{\mathbf{i+j+e1}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})}$$

Podľa dôkazu **Vety 1.2.2** sá dá ukázať, že $w_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} w_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})$. Pomocou tohto tvrdenia a transformáciou parametra dostaneme:

$$uw_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) = uw_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u}) \frac{\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} w_{\mathbf{i+j}} V_{\mathbf{i+j}} B_{\mathbf{j-e1}}^r(\mathbf{u})}{w_{\mathbf{i+e1}}^r(\mathbf{u})} =$$

$$\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} w_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} u B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u})$$

Analogicky sa vypočítajú aj ostatné členy. Potom:

$$V_{\mathbf{i}}^{r+1}(\mathbf{u}) = \frac{1}{w_{\mathbf{i}}^{r+1}} \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} w_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} \Big[u B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) + v B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e2}}(\mathbf{u}) + w B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e3}}(\mathbf{u}) +$$

$$t B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e4}}(\mathbf{u}) \Big] = \frac{\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} w_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B^{r+1}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{j}|=r+1} w_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{u})}$$

Kde sme použili **Vetu 1.2.1**.

Prípad parciálnych a smerových derivácií racionálneho Bézierovho štvorstena už nie je taký triviálny ako analytické vyjadrenie. Pre parciálnu deriváciu máme:

$$\frac{\partial}{\partial u} B^n(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u} \Big[\frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})} \Big] = \frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial u} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})} -$$

$$\frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial u} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})}{[\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})]^2}$$

Použijeme **Vetu 1.4.2**:

$$\frac{\partial}{\partial u} B^n(\mathbf{u}) = \frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} [B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})]}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})} -$$

$$\frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} [B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})]}{[\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})]^2} = \frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})} -$$

$$\frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})} - \frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u})}{[\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})]^2} +$$

$$\frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})}{[\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})]^2} = \frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})} -$$

$$\frac{n \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e1}}(\mathbf{u})}{[\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})]^2}$$

Analogicky aj pre ostatné parciálne derivácie.

Smerová derivácia racionálneho Bézierovho štvorstena sa definuje rovnako ako v prípade obyčajného Bézierovho štvorstena. Pre prvú smerovú deriváciu racionálneho Bézierovho štvorstena platí:

$$D_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = d \frac{\partial}{\partial u} B^n(\mathbf{u}) + e \frac{\partial}{\partial v} B^n(\mathbf{u}) + f \frac{\partial}{\partial w} B^n(\mathbf{u}) + g \frac{\partial}{\partial t} B^n(\mathbf{u}) =$$

$$\frac{n\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}}[dB^{n-1}_{\mathbf{i-e1}}(\mathbf{u}) + eB^{n-1}_{\mathbf{i-e2}}(\mathbf{u}) + fB^{n-1}_{\mathbf{i-e3}}(\mathbf{u}) + gB^{n-1}_{\mathbf{i-e4}}(\mathbf{u})]}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^{n}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})} -$$

$$\frac{n\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^{n}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})}{\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^{n}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\right]^2} \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^{n-1}_{\mathbf{i-e1}}(\mathbf{u})[dB^{n-1}_{\mathbf{i-e1}}(\mathbf{u}) + eB^{n-1}_{\mathbf{i-e2}}(\mathbf{u}) + fB^{n-1}_{\mathbf{i-e3}}(\mathbf{u}) +$$

$$gB^{n-1}_{\mathbf{i-e4}}(\mathbf{u})] = \frac{D_{\mathbf{d}} v(\mathbf{u})}{w(\mathbf{u})} - \frac{v(\mathbf{u}) D_{\mathbf{d}} w(\mathbf{u})}{w(\mathbf{u})^2}$$

kde $v(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B^{n}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$ a $w(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B^{n}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$. Podobne môžeme postupovať aj pri výpočte smerových derivácií vyššieho rádu.

Kapitola 2

Aplikácie Bézierovych štvorstenov.

2.1 Bézierov štvorsten ležiaci v jednej nadrovine v E^4. Vnorenie E^3 do nadplochy v E^4.

V tejto časti sa budeme zaoberať špeciálnym prípadom Bézierovho štvorstena. Majme daný Bézierov štvorsten ktorého riadiace vrcholy ležia v jednej nadrovine ϕ. Nech táto nadrovina ϕ má analytické vyjadrenie $ax + by + cz + dt + e = 0$. Pretože nadrovina je konvexná a podľa **Vety 1.3.2** patrí Bézierov štvorsten do konvexného obalu riadiacich vrcholov, celý Bézierov štvorsten leží v danej nadrovine ϕ. Takýto Bézierov štvorsten má všetky vlastnosti obyčajného Bézierovho štvorstena plus špeciálne vlastnosti:

1. Podľa **Vety 1.2.2** je každý čiastkový vrchol $V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u})$ konvexnou kombináciou vrcholov $V_{\mathbf{i}}$, t.j. leží v nadrovine ϕ.
2. Z vyjadrenia ľubovoľnej smerovej derivácie podľa **Vety 1.4.4** vyplýva, že smerová derivácia taktiež leží v nadrovine ϕ.
3. V každom bode takéhoto Bézierovho štvorstena je potom normálový vektor Bézierovho štvorstena zhodný s normálovým vektorom ϕ, t.j. týmto normálovým vektorom je vektor (a, b, c, d).

Z predchádzajúcich vlastností vidíme, že vložením Bézierovho štvorstena do nadroviny sme akoby stratili jeden rozmer tohto Bézierovho štvorstena, v E^4 je teraz viac "plochý", ale práve preto ho môžeme použiť na skúmanie podobných telies z E^3.
Teraz preskúmame spomínané vnorenie celého priestoru E^3 do nadplochy ϕ s analytickým vyjadrením $ax + by + cz + dt = 0$ v E^4. Aby bolo toto vnorenie jednoznačné, musíme najprv zaviesť v nadrovine ϕ súradnicovú sústavu, t.j. určiť začiatok a tri bázové vektory. Za začiatok súradnicovej sústavy v ϕ zoberieme pre jednoduchosť bod $(0, 0, 0, 0)$. Najprv vyberieme dva jednotkové vektory $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ z E^4 také, že patria nadrovine ϕ a sú na seba kolmé. Tretí bázový vektor $\mathbf{g}$ dorátame tak, aby bol kolmý na $\mathbf{e}, \mathbf{f}$, patril nadrovine ϕ a báza $(0, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ bola súhlasne orientovaná s ortonormálnou bázou v E^3.
Ak zoberieme ľubovoľný bod $X \in E^4$ patriaci nadploche ϕ, jeho súradnice v báze $(0, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ vyjadríme pomocou skalárneho súčinu ako $[(\mathbf{x}, \mathbf{e}), (\mathbf{x}, \mathbf{f}), (\mathbf{x}, \mathbf{g})]$, kde $\mathbf{x}$ je polohový vektor bodu X.
Vnorernie E^3 do nadplochy ϕ uskutočníme zobrazením ortonormálnej bázy E^3 na na našu bázu $(0, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ v nadrovine ϕ. Čiže ak Y je ľubovoľný bod z E^3 a X je jemu prislúchajúci bod z nadroviny ϕ, tak platí $Y = [(\mathbf{x}, \mathbf{e}), (\mathbf{x}, \mathbf{f}), (\mathbf{x}, \mathbf{g})]$. Pretože bod X patrí nadrovine ϕ, spĺňa aj analytické vyjadrenie nadroviny ϕ. Takto sme pre X dostali sústavu štyroch lineárnych rovníc, ktoré môžeme vyriešiť napríklad Cramerovým pravidlom.

2.2 Bézierove teleso v E^3.

Teraz máme vybudovaný dostatočný aparát na to, aby sme mohli skúmať trojrozmerné telesá, ktoré sú podobné Bézierovym štvorstenom v E^4. Dokonca po vnorení do E^4 ich môžeme povvažovať za Bézierove štvorsteny. Tieto telesá nazývame Bézierove. Bézierove teleso je teleso z E^3 definované podobne ako Bézierov štvorsten v E^4. Je určené:

1. Stupňom n.
2. Sieťou riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}} \in E^3$, $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$; $i + j + k + l = n$.
3. Definičným oborom, ktorým je množina prípustných hodnôt pre para-

meter $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$; $u+v+w+t = 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, $t \geq 0$. Túto množinu môžeme znázorniť ako barycentrické súradnice ľubovoľného vnútorného bodu štvorstena $ABCD$ vzhľadom na body A, B, C, D tak, ako v prípade Bézierovho štvorstena v E^4 (Body A, B, C, D sú nekoplanárne).

4. Rekurzívnym Casteljauovým algoritmom pre $\mathbf{u}$ z definičného oboru určíme čiastkové riadiace vrcholy:

$$V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = uV_{\mathbf{i+e1}}^{r-1}(\mathbf{u}) \ + vV_{\mathbf{i+e2}}^{r-1}(\mathbf{u}) \ + wV_{\mathbf{i+e3}}^{r-1}(\mathbf{u}) \ + tV_{\mathbf{i+e4}}^{r-1}(\mathbf{u})$$

kde $r = 1, .., n$ a $V_{\mathbf{i}}^0$ $(\mathbf{u})$ $=V_{\mathbf{i}}$ pre $\mid \mathbf{i} \mid = n$

5. Bod Bézierovho telesa prislúchajúci parametru $\mathbf{u}$ definujeme ako $V_0^n(\mathbf{u})$.

Racionálne Bézierove teleso definujeme racionálnym Casteljauovým algoritmom:

1. $\mathbf{u} = (u, v, w, t), u + v + w + t = 1, V_{\mathbf{i}}^0(\mathbf{u}) = V_{\mathbf{i}}, w_{\mathbf{i}}^0(\mathbf{u}) = w_{\mathbf{i}}$
2. $w_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = uw_{\mathbf{i+e1}}^{r-1}(\mathbf{u}) + vw_{\mathbf{i+e2}}^{r-1}(\mathbf{u}) + ww_{\mathbf{i+e3}}^{r-1}(\mathbf{u}) + tw_{\mathbf{i+e4}}^{r-1}(\mathbf{u})$
   $r = 1, .., n; \mid \mathbf{i} \mid = n - r$
3. $V_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \frac{1}{w_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u})} \Big[uw_{\mathbf{i+e1}}^{r-1}(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e1}}^{r-1}(\mathbf{u}) + vw_{\mathbf{i+e2}}^{r-1}(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e2}}^{r-1}(\mathbf{u}) +$
   $ww_{\mathbf{i+e3}}^{r-1}(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e3}}^{r-1}(\mathbf{u}) + tw_{\mathbf{i+e4}}^{r-1}(\mathbf{u}) V_{\mathbf{i+e4}}^{r-1}(\mathbf{u}) \Big]$
4. Bod racionálneho Bézierovho telesa prislúchajúci parametru $\mathbf{u}$ definujeme ako $V_0^n(\mathbf{u})$.

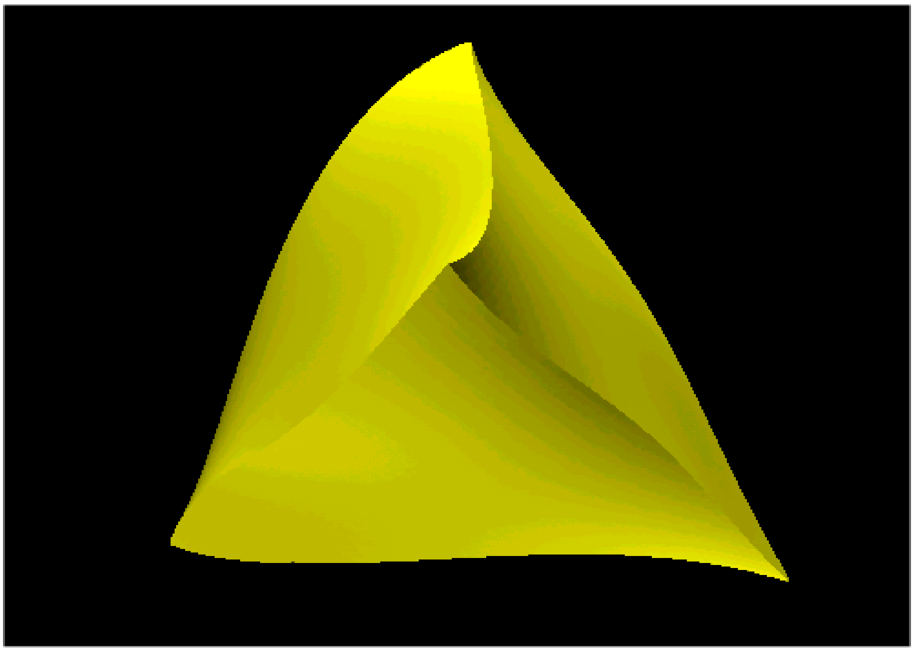
Keď teraz vnoríme Bézierove teleso do nadroviny v E^4, podľa predchádzajúceho bude toto teleso aj Bézierovym štvorstenom ležiacim v nadrovine. Preto pre Bézierove teleso platia tie isté vlastnosti ako pre Bézierov štvorsten:

1. Analytické vyjadrenie Bézierovho telesa resp. racionálneho Bézierovho telesa dostaneme z **Vety 1.2.2** resp. **Vety 1.6.1**. Pre Bézierove teleso máme:

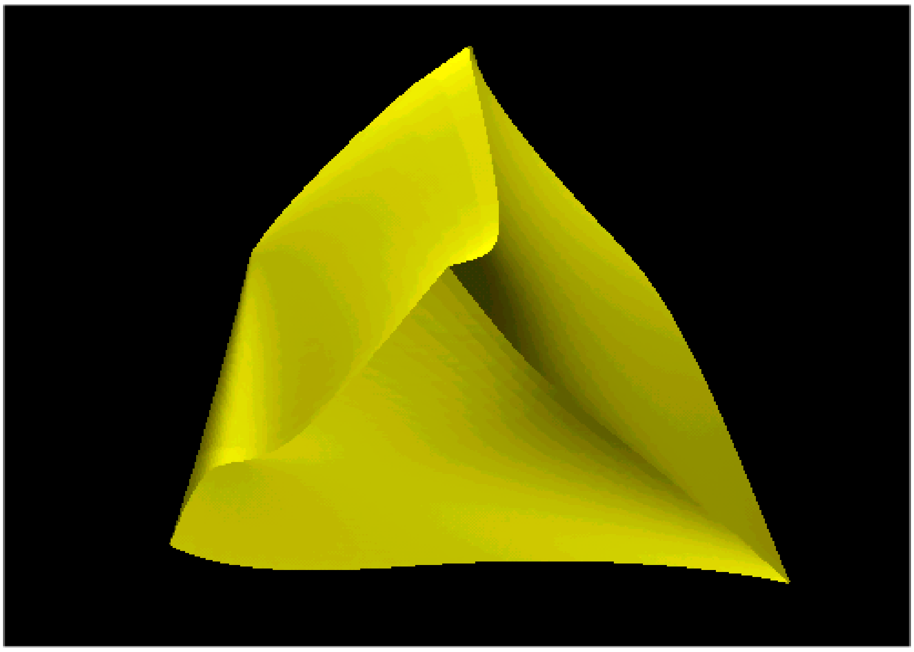
$$B^n(\mathbf{u}) = V_{\mathbf{0}}^n = \sum_{|\mathbf{j}|=n} V_{\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{u})$$

   a pre racionálne Bézierove teleso máme:

$$B^n(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} V_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}$$



Obr. 2.1: Bézierove teleso s náhodne vygenerovanou sieťou riadiacich vrcholov

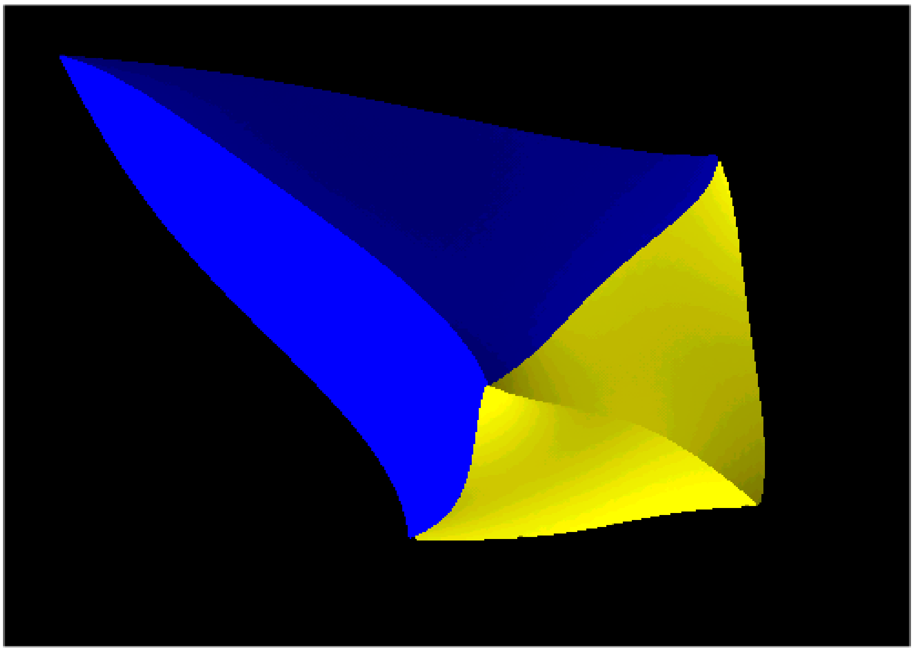


Obr. 2.2: Racionálne Bézierove teleso s rovnakou sieťou riadiacich vrcholov ako na Obr 2.1 a s náhodne vygenerovanými váhami.

2. Pre Bézierove teleso platia všetky vlastnosti Bézierovho štvorstena tak, ako boli spomenuté v časti 1.3.

3. Na modelovanie a vizualizáciu Bézierovho telesa môžeme použiť obe metódy spomínané v časti 1.6. Metóda subdivision nie je v tomto prípade vhodná, pretož nezjemňuje pri rekurzívnych krokoch hranicu Bézierovho telesa, ktorú jedinú pri vizualizácii vidíme.

4. Podľa **Vety 1.4.4** pre r-tú smerovú deriváciu Bézierovho telesa platí:
$$D_{\mathbf{d}}^r B^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) V_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=n-r} B_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}) V_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d})$$



Obr. 2.3: Dve C^1 spojité Bézierove telesá

5. Ak máme dve Bézierove telesá $B^n(\mathbf{u})$ a $C^n(\mathbf{u})$ rovnakého stupňa n s definičným oborom $ABCD$ resp. $EBCD$, tak nutnou a postačujúcou podmienkou pre ich spojitosť s-tého rádu na hranici BCD je podľa **Vety 1.5.1**:
$$W_{(r,j,k,l)} = V_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{w}) \quad \mathbf{j} = (0,j,k,l);\ j+k+l = n-r;\ r = 0, ..., s$$

kde $\mathbf{w}$ sú barycentrické súradnice bodu E vzhľadom na štvorsten $ABCD$.

2.3 Niektoré telesá vyjadrené ako racionálne Bézierove telesá.

Teraz sa pokúsime určiť niektoré základné geometrické telesá pomocou racionálnych Bézierových telies, t.j. sieť riadiacich vrcholov a k nim prislúchajúce váhy.

2.3.1 Štvorsten

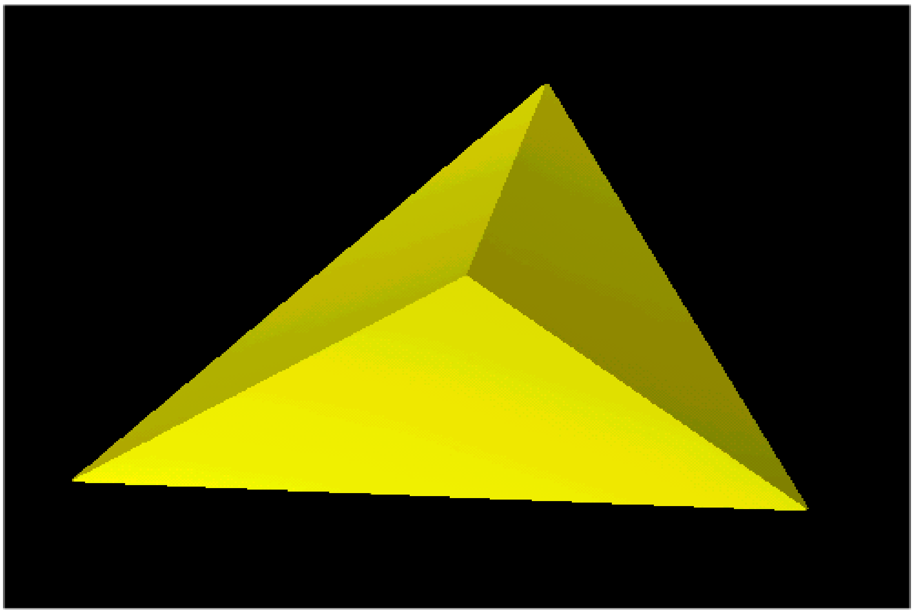
Toto teleso sa dá určiť jednoducho. Stačí nám na to racionálne Bézierove teleso stupňa 1 kde vrcholy racionálneho Bézierovho telesa sú vrcholmi štvorstena a váhy sú rovné 1.

2.3.2 Kužeľ

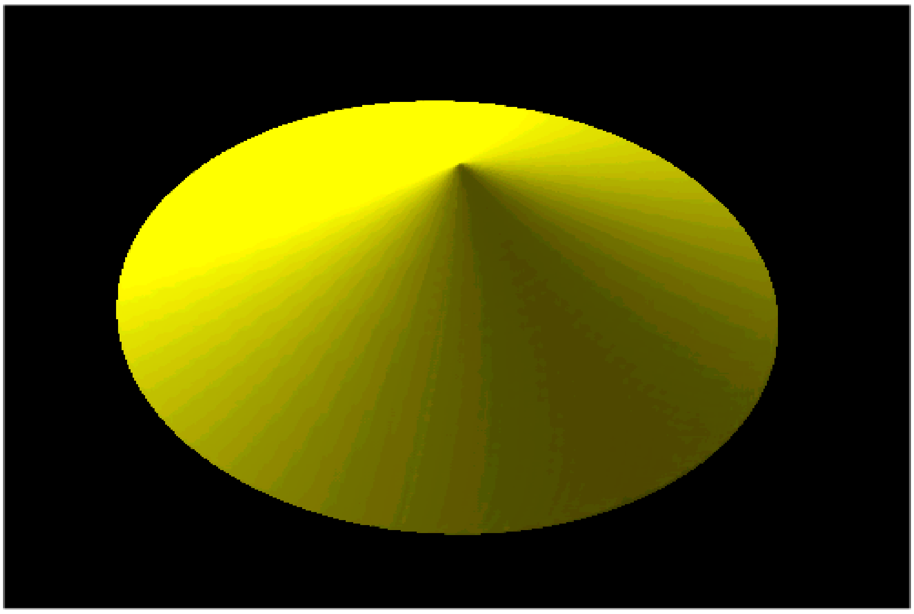
Kužeľ dostaneme ako racionálne Bézierove teleso stupňa 2 s takto danými vrcholmi a váhami: Vrchol $V_{(0,0,0,2)}$ s váhou 1 je vrchol kužeľa. Vrcholy $V_{(i,j,k,1)}$ pre $i+j+k = 1$ sú na plášti kužeľa s váhou 0. Vrcholy $V_{(2,0,0,0)}, V_{(2,0,0,0)}, V_{(2,0,0,0)}$ sú usporiadané pravidelne na odvode podstavy kužeľa a vrcholy $V_{(1,1,0,0)}$, $V_{(1,0,1,0)}, V_{(0,1,1,0)}$ ležia taktiež pravidelne okolo stredu podstavy v rovine podstavy kužeľa v dvojnásobnej vzdialenosti od stredu podstavy kužeľa. váhy $w_{(1,1,0,0)}$,$w_{(1,0,1,0)}$,$w_{(0,1,1,0)}$ majú hodnotu $0,5$ a ostatné tri majú hodnotu 1.

2.3.3 Guľový klin

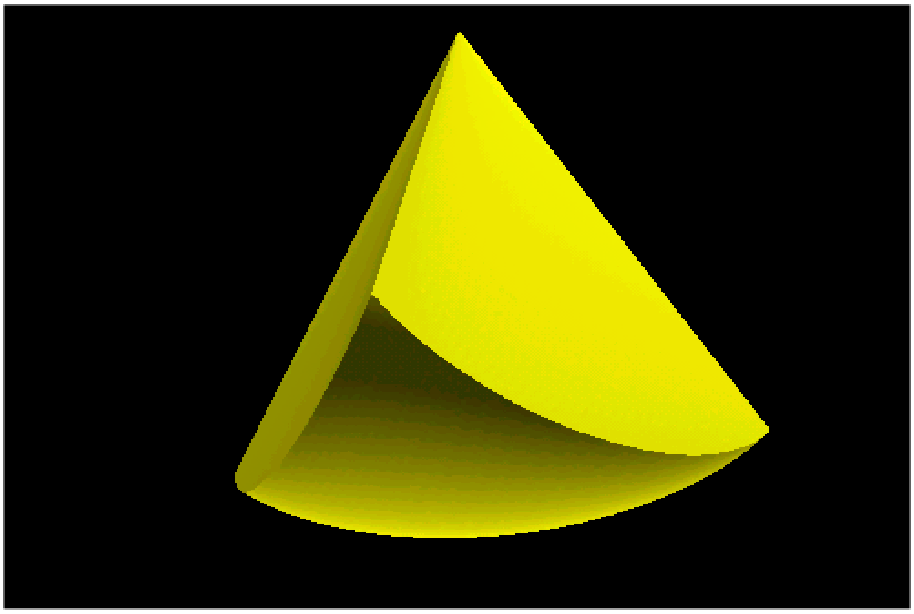
Guľový klin je teleso vytvorené stredom gule a trojuholníkom na povrchu gule. Vymodelujeme ho ako racionálne Bézierove teleso stupňa 2 s takto definovanými vrcholmi: Vrchol $V_{(0,0,0,2)}$ s váhou 1 je stred guľe. Vrcholy $V_{(2,0,0,0)}$, $V_{(0,2,0,0)}, V_{(0,0,2,0)}$ sú vrcholy trojuholníka na povrchu guľe s váhami rovnými 1. Vrcholy $V_{(1,1,0,0)}, V_{(1,0,1,0)}, V_{(0,1,1,0)}$ ležia vo vzdialenosti dvojnásobnej ako polomer gule v strede strán trojuholníka na povrchu gule tak, že ich váhy majú hodnotu $0,5$. Vrcholy $V_{(i,j,k,1)}$ pre $i + j + k = 1$ majú váhu 0 a ležia na spojniciach stredu gule a vrcholov trojuholníka na povrchu gule.



Obr. 2.4: Štvorsten vymodelovaný ako Bézierove teleso.



Obr. 2.5: Kužeľ vymodelovaný ako racionálne Bézierov teleso.



Obr. 2.6: Guľový klin vymodelovaný ako racionálne Bézierove teleso.

Literatúra

[1] Farin G. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design - A Practical Guide, Third Edition.* ISBN 0122490525, Academic Press, Boston, 1992.

[2] Ferko A., Ružický E. *Pocítačová grafika a spracovanie obrazu.* ISBN 80-967180-2-9, SAPIENTIA, Bratislava, 1995.

[3] Žára J. a kol. *Moderní pocítačová grafika.* ISBN 80-7226-049-9, Computer Press, Praha, 1998.