UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

RIGORÓZNA PRÁCA

Martin Samuelčík

BRATISLAVA 2004

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KATEDRA POČÍTAČOVEJ GRAFIKY A SPRACOVANIA OBRAZU

BÉZIEROVE TELESÁ

Martin Samuelčík

Rigorózna práca

BRATISLAVA 2004

Obsah

Úvod **3**

1 Bézierove telesá **4**

1.1 Barycentrické súradnice 4

1.2 Zovšeobecnené Bernsteinove polynómy. 5

1.3 Bézierove štvorsteny. 10

1.4 Bézierove telesá tenzorového súčinu. 15

1.5 Racionálne Bézierove telesá. 17

2 Vizualizácia Bézierových telies **21**

2.1 Siete bodov 21

2.2 Aproximácia Bézierových telies sieťou bodov 23

2.2.1 Diskretizácia definičného oboru 23

2.2.2 Zvyšovanie stupňa 24

2.2.3 Casteljauov algoritmus 24

2.3 Implementácia 25

Poďakovanie **28**

Literatúra **29**

Úvod

Cieľom tejto práce je vytvorenie základov jednotnej teórie Bézierovych telies v trojrozmernom euklidovskom priestore, presnejšie sa skúmajú dva základné typy týchto telies, Bézierove štvorsteny a Bézierove telesá tenzorového súčinu. Tieto trojparametrické telesá sú analógiou Bézierovych trojuholníkov resp. Bézierovych záplat a Bézierovych kriviek. Oba druhy telies sa zadefinujú podobne na základe zovšeobecnených Bernsteinových polynómov a barycentrických súradníc. Ďalej sa určia a popíšu základné vlastnosti, derivácie. Budeme sa venovať aj zovšeobecneniu v podobe racionálnych Bézierových telies, ktoré sa dajú použiť na modelovanie ďaľších útvarov (napr. kužeľosečiek).

Druhá časť práce je zameraná na grafické znázornenie telies, využijúc aj výsledky základnej teórie. Popíšu sa metódy , ktoré vedú k diskretizácii telies a ich následnej vizualizácii, taktiež sa popíšu základné implementačné postupy. Základným stavebným prvkom tejto časti je diskrétna štruktúra sieť bodov, ktorá slúži na uloženie riadiacej siete telesa ako aj výslednej aproximácie telesa. Na vizualizáciu použijeme grafické rozhranie OpenGL od SGI vo vývojovom prostredí Visual C++ .Net od spoločnosti Microsoft.

Kapitola 1

Bézierove telesá

1.1 Barycentrické súradnice

Definícia 1.1.1 *Majme dané v $E^m, m \in N$ $m+1$ bodov $A_1, ..., A_{m+1}$ takých, že neležia v jednej nadrovine. Potom pre každý bod $P \in E^m$ definujeme jeho barycentrické súradnice vzhľadom na body $A_1, ..., A_{m+1}$ ako $m+1$ čísel $(u_1, u_2, ..., u_{m+1}) = \mathbf{u}$, $u_j \in R, j = 1, ..., m+1$, pričom $P = \sum_{j=1}^{m+1} u_j A_j$ a $\sum_{j=1}^{m+1} u_j = 1$. Pre vektor $\mathbf{d} \in E^m$ môžeme podobne definovať jeho barycentrické súradnice vzhľadom na body $A_1, ..., A_{m+1}$ ako $m+1$ čísel $(v_1, v_2, ..., v_{m+1}) = \mathbf{v}$, $v_j \in R, j = 1, ..., m+1$, pričom $\mathbf{d} = \sum_{j=1}^{m+1} v_j A_j$ a $\sum_{j=1}^{m+1} v_j = 0$.*

Veta 1.1.1 *Pre výpočet barycentrických súradníc bodu alebo vektora platí:*

$$u_j = \frac{\begin{vmatrix} A_1 - A_{m+1} \\ A_2 - A_{m+1} \\ .. \\ B - A_{m+1} \\ .. \\ A_m - A_{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 - A_{m+1} \\ A_2 - A_{m+1} \\ ... \\ \\ A_m - A_{m+1} \end{vmatrix}}, \ j = 1, ..., m, \ u_{m+1} = 1 - \sum_{j=1}^{m} u_j$$

V riadkoch sa nachádzajú rozdiely afinných súradníc daných bodov, B sú afinné súradnice bodu P resp. vektora $\mathbf{u}$ a $B - A_{m+1}$ sa nachádza presne v j-tom riadku .

Dôkaz: Pretože body $A_1, ..., A_{m+1}$ neležia v jednej nadrovine, sú vektory $A_1 - A_{m+1}, ..., A_m - A_{m+1}$ lineárne nezávislé, ich počet je m, čiže tvoria bázu vektorového priestoru $V(E^m)$.

Preto potom môžeme pre vektor $B - A_{m+1} \in V(E^m)$ písať:

$$\exists e_1, ..., e_m \in R,\ B - A_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} e_j(A_j - A_{m+1})\ (*)$$

Úpravou dostaneme:

$$B - A_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} e_j A_j - \sum_{j=1}^{m} e_j A_{m+1}$$

$$B = \sum_{j=1}^{m} e_j A_j - \sum_{j=1}^{m} e_j A_{m+1} + A_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} e_j A_j + (1 - \sum_{j=1}^{m} e_j) A_{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} u_j A_j$$

Porovnaním dostaneme $u_j = e_j$ pre $j = 1, ..., m$ a $u_{m+1} = (1 - \sum_{j=1}^{m} e_j) = (1 - \sum_{j=1}^{m} u_j)$. Pre výpočet e_j sa v $(*)$ použije Cramerove pravidlo pre riešenie sústavy m lineárnych rovníc o m neznámych (môžu sa použiť aj iné metódy). Tým dostaneme požadované.

Determinanty z predchádzajúcej vety nám až na znamienko určujú mieru množiny v danom priestore (v jednorozmernom euklidovskom priestore je to dĺžka úsečky, v dvojrozmernom priestore je to obsah trojuholníka, v trojrozmernom priestore objem štvorstena). Preto sa aj barycentrické súradnice dajú určiť (až na znamienko) ako pomer mier príslušných množín. Znamienko sa potom určí podľa polohy bodu vzhľadom na dané súradnicové body.

1.2 Zovšeobecnené Bernsteinove polynómy.

Pred definíciou zovšeobecneného Bernsteinovho polynómu si zadefinujeme zovšeobecnené kombinačné číslo, ktore potom využijeme.

Definícia 1.2.1 *Majme daný multiindex* $\mathbf{i} = (i_1, i_2, ..., i_k); k \in N; i_j \in N$ *pre* $j = 1, 2, ..., k$. *Zovšeobecnené kombinačné číslo* $\binom{n}{\mathbf{i}}$ *k-teho rádu definujeme ako*

$$\binom{n}{\mathbf{i}} := \frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} i_j!}$$

kde $n =\mid \mathbf{i} \mid = \sum_{j=1}^{k} i_j$ *pre* $i_j \geq 0$. *V prípade, že niektoré z čísel* i_j *je záporné, kladieme* $\binom{n}{\mathbf{i}} = 0$.

Definícia 1.2.2 *Majme dané prirodzené číslo* k, *multiindex* $i = (i_1, i_2, ..., i_k); n =\mid \mathbf{i} \mid$ *a barycentrické súradnice* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_k); \sum_{j=1}^{k} u_k = 0, 1$. *Potom zovšeobecnený Bernsteinov polynóm* $B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u})$ *k-teho rádu definujeme ako*

$$B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u}) := \binom{n}{\mathbf{i}} \prod_{j=1}^{k} u_k^{i_k}$$

kde $\binom{n}{\mathbf{i}}$ je zovšeobecnené kombinačné číslo k-teho rádu. V danom výraze kladieme 0^0 *definitoricky rovné 1.*

V predchádzajúcich definíciách sa v definovanom výraze nepoužíva označenie rádu, pretože rád je zahrnutý v multiindexe resp. braycentrických súradniciach.

Veta 1.2.1 *Zovšeobecnené Bernsteinove polynómy majú nasledovné vlastnosti:*

a) $B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \geq 0$

b) $B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{k} u_j B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e_j}}(\mathbf{u}), \mid \mathbf{i} \mid = \mathrm{n}$, *pričom* $\mathbf{e_j}$ *sú základné multiindexy, ktore majú na j-tom mieste 1 a všade inde 0.*

c) $\sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = 1$

d) Pre parciálnu deriváciu Bernsteinovho polynómu podľa $u_j, j = 1, ..., k$ *platí:*

$$\frac{\partial}{\partial u_j} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = n\Big[B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e_j}}(\mathbf{u}) - B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})\Big]$$

pre $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_k)$, $\sum_{j=1}^{k} u_j = 1$.

e) Funkcia $B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) : R^k \longrightarrow R$ *dosahuje svoje maximum pre* $u_j = \frac{i_j}{n}, j = 1, ..., k$

Dôkaz:

a) Táto nerovnosť vyplýva z toho, že zovšeobecnené kombinačné číslo je nezáporné a aj čísla $u_1^{i_1}, ..., u_k^{i_k}$ su nezáporné.

b) Úpravou pravej strany dostávame

$$\sum_{j=1}^{k} u_j B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e_j}}(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{k} u_j \binom{n-1}{\mathbf{i}-\mathbf{e_j}} u_1^{i_1}..u_j^{i_j-1}..u_k^{i_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n-1)!}{i_1!..(i_j-1)!..i_k!} u_1^{i_1}..u_j^{i_j}..u_k^{i_k} =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{i_j}{n} \frac{n!}{i_1!..i_j!..i_k!} u_1^{i_1}..u_j^{i_j}..u_k^{i_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{i_j}{n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \sum_{j=1}^{k} \frac{i_j}{n}$$

Pretože je $\mid \mathbf{i} \mid = n$, t.j $\sum_{j=1}^{k} i_j = n$, platí

$$\sum_{j=1}^{k} u_j B^{n-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{e_j}}(\mathbf{u}) = B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \sum_{j=1}^{k} \frac{i_j}{n} = B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

c) Matematickou indukciou podľa n ukážeme, že $\sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = (u_1+u_2+...+u_k)^n = 1$

1. Pre $n = 0$ platí $\sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=0} B^0_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{0!}{0!...0!} u_1^0...u_k^0 = 1 = (u_1 + u_2 + ... + u_k)^0$

2. Nech rovnosť platí pre n, ukážeme, že platí aj pre $n+1$:

$$(u_1+u_2+...+u_k)^{n+1} = (u_1+u_2+...+u_k)(u_1+u_2+...+u_k)^n =$$

$$= (u_1+u_2+...+u_k)\sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = (u_1+u_2+...+u_k)\sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} \frac{n!}{i_1!...i_k!}u_1^{i_1}...u_k^{i_k} =$$

$$= \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} \frac{n!}{i_1!...i_k!}u_1^{i_1+1}...u_k^{i_k} + ... + \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} \frac{n!}{i_1!...i_k!}u_1^{i_1}...u_k^{i_k+1} =$$

$$= \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} \frac{i_1+1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(i_1+1)!...i_k!}u_1^{i_1+1}...u_k^{i_k}+...+\sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} \frac{i_k+1}{n+1}\frac{(n+1)!}{i_1!...(i_k+1)!}u_1^{i_1}...u_k^{i_k+1} =$$

$$= \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} \frac{i_1+1}{n+1}B_{\mathbf{i+e_1}}^{n+1}(\mathbf{u}) + ... + \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n}} \frac{i_k+1}{n+1}B_{\mathbf{i+e_k}}^{n+1}(\mathbf{u})$$

Transformáciou indexov v jednotlivých sumách dostaneme:

$$(u_1+u_2+...+u_k)^{n+1} = \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n+1}} \frac{i_1}{n+1}B_{\mathbf{i}}^{n+1}(\mathbf{u}) + ... + \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n+1}} \frac{i_k}{n+1}B_{\mathbf{i}}^{n+1}(\mathbf{u}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n+1}} B_{\mathbf{i}}^{n+1}(\mathbf{u})\frac{i_1+...+i_k}{n+1} = \sum_{\mathbf{i},|\mathbf{i}|=\mathrm{n+1}} B_{\mathbf{i}}^{n+1}(\mathbf{u})$$

Tým sme dokázali indukčný krok a aj celé tvrdenie.

d) Nech P s barycentrickými súradnicami $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_k)$ má homogénne súradnice $U_1, U_2, ..., U_k$, pričom $\sum_{j=1}^k U_j \neq 0$ a jeho barycentrické súradnice sú $u_i = \frac{U_i}{\sum_{j=1}^k U_j}, i = 1, ..., k$. Označme $\xi = \sum_{j=1}^k U_j$. Potom:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial U_j}B_{\mathbf{i}}^n((\frac{U_1}{\xi}, \frac{U_2}{\xi}, ..., \frac{U_k}{\xi},))\Big|_{\xi=1} \quad j = 1, ..., k$$

Nech $\mathbf{i} = (i_1, i_2, ..., i_k)$, $\sum_{j=1}^k i_j = n$. Počítajme:

$$\frac{\partial}{\partial U_j}B_{\mathbf{i}}^n((\frac{U_1}{\xi}, \frac{U_2}{\xi}, ..., \frac{U_k}{\xi})) = \frac{\partial}{\partial U_j}\Big[\binom{n}{\mathbf{i}}\Big(\frac{U_1}{\xi}\Big)^{i_1}\Big(\frac{U_2}{\xi}\Big)^{i_2}...\Big(\frac{U_k}{\xi}\Big)^{i_k}\Big] =$$

$$= \binom{n}{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial U_j}\Big[\frac{1}{\xi^n}U_1^{i_1}U_2^{i_2}...U_k^{i_k}\Big] = \binom{n}{\mathbf{i}}\Big[\frac{i_j}{\xi^n}U_1^{i_1}..U_j^{i_j-1}..U_k^{i_k} - \frac{n}{\xi^{n+1}}U_1^{i_1}U_2^{i_2}...U_k^{i_k}\Big]$$

$$= \frac{n}{\xi}\Big[\binom{n-1}{\mathbf{i}-\mathbf{e_j}}\frac{U_1^{i_1}..U_j^{i_j-1}..U_k^{i_k}}{\xi^{n-1}} - \binom{n}{\mathbf{i}}\frac{U_1^{i_1}U_2^{i_2}...U_k^{i_k}}{\xi^n}\Big]$$

$$= \frac{n}{\xi}\Big[B_{\mathbf{i-e_j}}^{n-1}((\frac{U_1}{\xi}, \frac{U_2}{\xi}, ..., \frac{U_k}{\xi})) - B_{\mathbf{i}}^n((\frac{U_1}{\xi}, \frac{U_2}{\xi}, ..., \frac{U_k}{\xi}))\Big]$$

Teraz pre $\xi = 1$ dostávame:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = n\Big[B_{\mathbf{i-e_j}}^{n-1}(\mathbf{u}) - B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})\Big]$$

e) Ak by pre nejaké $j = 0, 1, ..., k$ bolo $i_j = 0$, tak maximum sa pre tento index dosahuje pre $u_j = 0 = \frac{i_j}{n}$, pretože $\binom{n}{\mathbf{i}} u_1^{i_1}..u_j^{i_j}..u_k^{i_k} \leq \binom{n}{\mathbf{i}} u_1^{i_1}..0^0..u_k^{i_k}$. Čiže pre $i_j = 0$ nám tvrdenie platí. Predpokladajme teraz, že $i_j \neq 0$ pre všetky $j = 0, 1, ..., k$. Z vety o Lagrangeových multiplikátoroch definujme funkciu $L(\mathbf{u}) = B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + \lambda(u_1 + ... + u_k - 1)$ pre $\lambda \in R$. Parciálne derivácie tejto funkcie sú:

$$\frac{\partial}{\partial u_j} L(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u_j} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + \lambda = n\Big[B_{\mathbf{i}-\mathbf{e_j}}^{n-1}(\mathbf{u}) - B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})\Big] + \lambda$$

Teraz pre nájdenie extrémov Bernsteinovho polynómu potrebujeme nájsť stacionárne body funkcie $L(\mathbf{u})$, t.j. keď sú všetky jej parciálne derivácie nulové. Z toho dostávame:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} L(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u_2} L(\mathbf{u}) = ... = \frac{\partial}{\partial u_k} L(\mathbf{u}) = 0$$

$$n\Big[B_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}}^{n-1}(\mathbf{u}) - B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})\Big] + \lambda = n\Big[B_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}}^{n-1}(\mathbf{u}) - B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})\Big] + \lambda = ... = n\Big[B_{\mathbf{i}-\mathbf{e_k}}^{n-1}(\mathbf{u}) - B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})\Big] + \lambda$$

$$nB_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}}^{n-1}(\mathbf{u}) + \lambda = nB_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}}^{n-1}(\mathbf{u}) + \lambda = ... = nB_{\mathbf{i}-\mathbf{e_k}}^{n-1}(\mathbf{u}) + \lambda$$

$$n\frac{(n-1)!}{(i_1-1)!...i_k!} u_1^{i_1-1}...u_k^{i_k} = ... = n\frac{(n-1)!}{i_1!..(i_k-1)!} u_1^{i_1}...u_k^{i_k-1}$$

$$i_1 u_1^{i_1-1}...u_k^{i_k} = ... = i_k u_1^{i_1}...u_k^{i_k-1}$$

Aby sme dosiahli maximum, musí byť $u_i \neq 0, i = 1, ..., k$, pretože ak by sme mali aspoň jedno u_i nulové, dostali by sme $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = 0$, a to nie je maximum. Preto môžeme písať:

$$i_1 \frac{u_1^{i_1}...u_k^{i_k}}{u_1} = ... = i_k \frac{u_1^{i_1}...u_k^{i_k}}{u_k}$$

$$\frac{i_1}{u_1} = ... = \frac{i_k}{u_k} = S,\ S \in R$$

$$u_j = \frac{i_j}{S},\ j = 1, .., k;\ \sum_{j=1}^{k} u_j = 1 = \sum_{j=1}^{k} \frac{i_j}{S} \Longrightarrow S = \sum_{j=1}^{k} i_j = n \Longrightarrow u_j = \frac{i_j}{n}$$

Definícia 1.2.3 *Majme daný vektor* $\mathbf{d}$ *s barycentrickými súradnicami* $\mathbf{d} = (v_1, v_2, ..., v_k)$. *Potom definujeme smerovú deriváciu Bernsteinovho polynómu* r*-tého rádu v smere vektora* $\mathbf{d}$ *rekurzívne ako*

$$D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} D_{\mathbf{d}}^{r-1} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + v_2 \frac{\partial}{\partial u_2} D_{\mathbf{d}}^{r-1} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + ... + v_k \frac{\partial}{\partial u_k} D_{\mathbf{d}}^{r-1} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}); r = 1, ...$$

pričom $D_{\mathbf{d}}^0 B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$.

Veta 1.2.2 *Platí:*

$$D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u})$$

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa r:

1. Pre $r = 0$ máme

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{d}}^0 B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-0)!} \sum_{|\mathbf{j}|=0} B_{\mathbf{j}}^0(\mathbf{d}) \mathbf{B}_{\mathbf{i-j}}^{\mathbf{n-0}}(\mathbf{u})$$

2. Z definície smerovej derivácie máme:

$$D_{\mathbf{d}}^{r+1} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + v_2 \frac{\partial}{\partial u_2} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + \ldots + v_k \frac{\partial}{\partial u_k} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$$

Teraz budeme upravovať člen $\frac{\partial}{\partial u_l} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$ pre $l = 1, \ldots, k$. Použitím indukčného predpokladu dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial u_l} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u_l} \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j}}^{n-r}(\mathbf{u}) =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) \frac{\partial}{\partial u_l} B_{\mathbf{i-j}}^{n-r}(\mathbf{u})$$

Použijeme **Vetu 1.4.2**:

$$\frac{\partial}{\partial u_l} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d})(n-r) \Big[B_{\mathbf{i-j-e_l}}^{n-r-1}(\mathbf{u}) - B_{\mathbf{i-j}}^{n-r}(\mathbf{u}) \Big] =$$

$$\frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j-e_l}}^{n-r-1}(\mathbf{u}) - (n-r) \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j}}^{n-r}(\mathbf{u})$$

Použitím indukčného predpokladu na druhý člen dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial u_l} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j-e_l}}^{n-r-1}(\mathbf{u}) - (n-r) D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$$

Pretože máme určené parciálne derivácie $D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$, môžeme určiť $D_{\mathbf{d}}^{r+1} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$:

$$D_{\mathbf{d}}^{r+1} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + v_2 \frac{\partial}{\partial u_2} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) + \ldots + v_k \frac{\partial}{\partial u_k} D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) =$$

$$= \frac{n!}{(n-(r+1))!} \Big[v_1 \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j-e_1}}^{n-r-1}(\mathbf{u}) + v_2 \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j-e_2}}^{n-r-1}(\mathbf{u}) + \ldots +$$

$$+ v_k \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j-e_k}}^{n-r-1}(\mathbf{u}) \Big] - (n-r)(v_1 + v_2 + \ldots + v_k) D_{\mathbf{d}}^r B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$$

Vieme, že $\sum_{j=1}^k v_j = 0$. V jednotlivých sumách transformujeme premennú $\mathbf{j} + \mathbf{e_l}$ na $\mathbf{j}$ pre $l = 1, \ldots, k$. Dostaneme:

$$D_{\mathbf{d}}^{r+1} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \Big[v_1 \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} B_{\mathbf{j-e_1}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i-j}}^{n-r-1}(\mathbf{u}) +$$

$$+v_2 \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e_2}}(\mathbf{d}) B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u}) + ... + v_k \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e_k}}(\mathbf{d}) B^{n-r-1}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u}) =$$

$$= \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} B^{n-(r+1)}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u}).\Big[v_1 B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e_1}}(\mathbf{d}) + v_2 B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e_2}}(\mathbf{d}) + ... + v_k B^r_{\mathbf{j}-\mathbf{e_k}}(\mathbf{d})\Big]$$

Použitím **Vety 1.2.1** dostaneme:

$$D^{r+1}_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} B^{r+1}_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) B^{n-(r+1)}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u})$$

Tým sme dokázali požadované.

1.3 Bézierove štvorsteny.

Definícia 1.3.1 *Nech je dané:*

- *stupeň Bézierovho štvorstena, označenie n*
- *sieť riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}} \in E^3$, kde $\mathbf{i}$ je štvorindex, $\mathbf{i} = (i, j, k, l) \mid \mathbf{i} \mid = i+j+k+l = n$. Zadanú sieť riadiacich vrcholov je možné schematicky zobraziť v tvare štvorstennej štruktúry s vrcholmi v bodoch $V_{(n,0,0,0)}, V_{(0,n,0,0)}, V_{(0,0,n,0)}, V_{(0,0,0,n)}$.*
- *Nech su dané štyri nekoplanárne body $A, B, C, D \in E^3$. Potom kladieme štvorsten $ABCD$ definičným oborom Bézierovho štvorstena.*

Teraz môžeme definovať Bézierov štvorsten pomocou Casteljauovho algoritmu:

- *majme daný bod P z definičného oboru Bézierovho štvorstena s barycentrickými súradnicami $\mathbf{u} = (u, v, w, t), u + v + w + t = 1$*
- *označme $V^0_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = V_{\mathbf{i}}$ pre $\mid \mathbf{i} \mid = n$ a ďalej označme základné multiindexy*

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, 0),\ \mathbf{e_3} = (0, 0, 1, 0),\ \mathbf{e_4} = (0, 0, 0, 1)$$

- *rekurzívne definujeme:*

$$V^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = uV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e_1}}(\mathbf{u}) + vV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e_2}}(\mathbf{u}) + wV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e_3}}(\mathbf{u}) + tV^{r-1}_{\mathbf{i}+\mathbf{e_4}}(\mathbf{u})$$

  pre $r = 1, 2, .., n$; $\mid \mathbf{i} \mid = n - r$

- *bod Bézierovho štvorstena stupňa n so sieťou riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}}$ pre $\mid \mathbf{i} \mid =$ n, prislúchajúci parametru $\mathbf{u}$ definujeme ako $V^n_{\mathbf{0}}(\mathbf{u})$ a budeme ho označovať ako $B^n(\mathbf{u})$.*

Veta 1.3.1 *(Analytické vyjadrenie Bézierovho štvorstena) Pre* $r = 0, 1, ..., n$ *platí*

$$V_{\mathbf{i}}^{r}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r}(\mathbf{u})$$

kde $B_{\mathbf{j}}^{r}(\mathbf{u})$ *je zovšeobecnený Bernsteinov polynóm štvrtého rádu.*

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa r.

1. Pre $r = 0$ máme

$$V_{\mathbf{i}}^{0} = V_{\mathbf{i}} = \sum_{|\mathbf{j}|=0} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{0}(\mathbf{u}) \quad |\, \mathbf{i} \,| = n$$

2. Nech pre r platí

$$V_{\mathbf{i}}^{r}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r}(\mathbf{u})$$

Ukážeme, že platí aj pre r+1. Počítajme z definície:

$$V_{\mathbf{i}}^{r+1}(\mathbf{u}) = uV_{\mathbf{i}+\mathbf{e_1}}^{r}(\mathbf{u}) + vV_{\mathbf{i}+\mathbf{e_2}}^{r}(\mathbf{u}) + wV_{\mathbf{i}+\mathbf{e_3}}^{r}(\mathbf{u}) + tV_{\mathbf{i}+\mathbf{e_4}}^{r}(\mathbf{u}) =$$

$$u \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{e_1}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r}(\mathbf{u}) + v \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{e_2}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r}(\mathbf{u}) + w \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{e_3}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r}(\mathbf{u}) +$$

$$t \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{i}+\mathbf{e_4}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r}(\mathbf{u}) = u \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e_1}}^{r}(\mathbf{u}) + v \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e_2}}^{r}(\mathbf{u}) +$$

$$w \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e_3}}^{r}(\mathbf{u}) + t \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e_4}}^{r}(\mathbf{u}) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} \Big[uB_{\mathbf{j}-\mathbf{e_1}}^{r}(\mathbf{u}) + vB_{\mathbf{j}-\mathbf{e_2}}^{r}(\mathbf{u}) + wB_{\mathbf{j}-\mathbf{e_3}}^{r}(\mathbf{u}) + tB_{\mathbf{j}-\mathbf{e_4}}^{r}(\mathbf{u}) \Big] =$$

$$= \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} V_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r+1}(\mathbf{u})$$

kde sme využili **Vetu 1.2.1** a transformáciu multiindexu.

Teraz pre $r = n$ vo **Vete 1.3.1** dostaneme:

$$B^{n}(\mathbf{u}) = V_{\mathbf{0}}^{n} = \sum_{|\mathbf{j}|=n} V_{\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{u})$$

čím sme dostali analytické vyjadrenie Bézierovho štvorstena.

Veta 1.3.2 *Bézierov štvorsten je afinne invariantný, t.j. ak* A *je afinná transformacia, potom*

$$A\Big(\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u}) \Big) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} A(V_{\mathbf{i}}) B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u})$$

Dôkaz: Podľa **Vety 1.3.1** môžeme $B^n(\mathbf{u})$ vyjadriť ako $\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$, t.j. ako lineárnu kombináciu bodov $V_{\mathbf{i}}$. A podľa **Vety 1.2.1** je $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = 1$. Čiže $B^n(\mathbf{u})$ môžeme vyjadriť ako barycentrickú kombináciu bodov $V_{\mathbf{i}}$. Keďže afinná transformácia zachováva barycentrickú kombináciu bodov, je Bézierov štvorsten $B^n(\mathbf{u})$ afinne invariantný.

Veta 1.3.3 *Pre každé* $\mathbf{u}$ *z definičného oboru Bézierovho štvorstena patrí* $B^n(\mathbf{u})$ *do konvexného obalu bodov* $V_{\mathbf{i}}$, $|\,\mathbf{i}\,| = n$.

Dôkaz: Pretože podľa **Vety 1.3.1** je $B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$ a pre každé $\mathbf{u}$ z definičného oboru je $B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \geq 0$ (**Veta 1.2.1**), potom je $B^n(\mathbf{u})$ konvexnou kombináciou bodov $V_{\mathbf{i}}$, $|\,\mathbf{i}\,| = n$. t.j. $B^n(\mathbf{u})$ patrí do konvexného obalu bodov $V_{\mathbf{i}}$, $|\,\mathbf{i}\,| = n$.

Veta 1.3.4 *Rohové body Bézierovho štvorstena sú totožné s rohovými bodmi riadiacej siete, t.j. body* $V_{(n,0,0,0)}, V_{(0,n,0,0)}, V_{(0,0,n,0)}, V_{(0,0,0,n)}$ *patria Bézierovmu štvorstenu* $B^n(\mathbf{u})$.

Dôkaz: Ak máme daný definičný obor $ABCD$ Bézierovho štvorstena $B^n(\mathbf{u})$, môžeme z neho vybrať práve body A, B, C, D. Tieto majú vzhľadom na štvorsten $ABCD$ barycentrické súradnice $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$. Keď tieto súradnice dosadíme za $\mathbf{u}$ v rovnosti $B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$, dostaneme

$$B^n((1,0,0,0)) = V_{(n,0,0,0)}, B^n((0,1,0,0)) = V_{(0,n,0,0)}, B^n((0,0,1,0)) = V_{(0,0,n,0)},$$

$$B^n((0,0,0,1)) = V_{(0,0,0,n)}$$

, čo bolo treba ukázať.

Veta 1.3.5 *Hraničné plochy Bézierovho štvorstena sú Bézierove trojuholníky, hraničné krivky sú Bézierove oblúky.*

Dôkaz: Hraničné plochy Bézierovho štvorstena dostaneme vtedy, ak za $\mathbf{u}$ berieme súradnice v tvare $(0,v,w,t), (u,0,w,t), (u,v,0,t), (u,v,w,0)$.
Preberieme prípad $\mathbf{u} = (0,v,w,t)$:

$$B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}((0,v,w,t)) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} \binom{n}{\mathbf{i}} 0^i v^j w^k t^l = \sum_{\substack{|\mathbf{i}|=n \\ i=0}} V_{\mathbf{i}} \binom{n}{\mathbf{i}} v^j w^k t^l = \sum_{|\mathbf{j}|=n} V_{\mathbf{j}} \binom{n}{\mathbf{j}} v^j w^k t^l$$

kde $\mathbf{j} = (j,k,l)$ a $v + w + t = 1$. Takto sme dostali vyjadrenie pre jednu hraničnú plochu. Z jej analytického vyjadrenia vidíme, že táto plocha je Bézierova. Podobne sa určia aj ostatné tri hraničné plochy.

Analogicky pre hraničné krivky. Tieto krivky dostaneme dosadením nasledovných súradníc za $\mathbf{u}$: $(0,0,w,t),(0,v,0,t),(0,v,w,0),(u,0,0,t),(u,0,w,0),(u,v,0,0)$. Preskúmaním prípadu $\mathbf{u}=(0,0,w,t)$ by sme dospeli k analytickému vyjadreniu tejto hraničnej krivky:

$$B^n((0,0,w,t)) = \sum_{|\mathbf{j}|=n} V_{\mathbf{j}} \binom{n}{\mathbf{j}} w^k t^l \quad \mathbf{j}=(k,l), w+t=1$$

čo je analytické vyjadrenie Bézierovho oblúka. Podobne pre ostatných päť hraničných kriviek.

Veta 1.3.6 *Bézierov štvorsten je v premennej* $\mathbf{u}$ *polynomická funkcia stupňa* n*. Je však možné zapísť takýto Bézierov štvorsten ako Bézierov štvorsten stupňa* $n+1$*:*

$$B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

kde $W_{\mathbf{i}} = \frac{i}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}} + \frac{j}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}} + \frac{k}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_3}} + \frac{l}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_4}}$ *pre* $\mathbf{i}=(i,j,k,l)$, $i+j+k+l=n+1$.

Dôkaz: Prvá časť vety priamo vyplýva z analytického vyjadrenia Bézierovho štvorstena podľa **Vety 1.3.1**. Druhú časť ukážeme dokázaním rovnosti $\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$. Platí:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \left[\frac{i}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}} + \frac{j}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}} + \frac{k}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_3}} + \right.$$
$$\left. \frac{l}{n+1}V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_4}}\right] \frac{(n+1)!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l = u \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}} B^n_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}}(\mathbf{u}) +$$
$$v \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}} B^n_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}}(\mathbf{u}) + w \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_3}} B^n_{\mathbf{i}-\mathbf{e_3}}(\mathbf{u}) + t \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} V_{\mathbf{i}-\mathbf{e_4}} B^n_{\mathbf{i}-\mathbf{e_4}}(\mathbf{u})$$

Transformáciou parametrov v jednotlivých sumách dostaneme:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} W_{\mathbf{i}} B^{n+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = (u+v+w+t) \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Definícia 1.3.2 *Majme daný vektor* $\mathbf{d}$ *s barycentrickými súradnicami* (d,e,f,g) *;* $d+e+f+g=0$*. Potom deriváciu štvorstena* $B^n(\mathbf{u})$ *v smere vektora* d *definujeme ako*

$$D_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u}B^n(\mathbf{u}) + e\frac{\partial}{\partial v}B^n(\mathbf{u}) + f\frac{\partial}{\partial w}B^n(\mathbf{u}) + g\frac{\partial}{\partial t}B^n(\mathbf{u})$$

kde $\frac{\partial}{\partial u}B^n(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial v}B^n(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial w}B^n(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial t}B^n(\mathbf{u})$ *sú parciálne derivácie Bézierovho štvorstena. Ak definujeme*

$$\partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) = \frac{\partial^{|\mathbf{i}|}}{\partial u^i \partial v^j \partial w^k \partial t^l} B^n(\mathbf{u}) \qquad \mathbf{i}=(i,j,k,l)$$

potom môžeme prvú smerovú deriváciu napísať aj ako

$$D_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = D^1_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=1} \partial^{\mathbf{i}} B^n(\mathbf{u}) B^1_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})$$

Ďalej môžeme rekurzívne definovať smerovú deriváciu r-tého rádu:

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u}D^{r-1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) \ + \ e\frac{\partial}{\partial v}D^{r-1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) \ + \ f\frac{\partial}{\partial w}D^{r-1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) \ +$$

$$+ \ g\frac{\partial}{\partial t}D^{r-1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u})$$

Veta 1.3.7 *Platí:*

$$D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})$$

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa r:

1. Pre $r = 1$ vyplýva tvrdenie z definície

2. Nech tvrdenie platí pre nejaké r , $1 \le r \le n-1$. Ukážeme, že platí aj pre $r+1$. Použijeme definíciu smerovej derivácie vyššieho rádu:

$$D^{r+1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = d\frac{\partial}{\partial u}\Big[D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u})\Big] + e\frac{\partial}{\partial v}\Big[D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u})\Big] + f\frac{\partial}{\partial w}\Big[D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u})\Big] +$$

$$g\frac{\partial}{\partial t}\Big[D^r_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u})\Big] = d\frac{\partial}{\partial u}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})\Big] + e\frac{\partial}{\partial v}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})\Big] +$$

$$+f\frac{\partial}{\partial w}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})\Big] + g\frac{\partial}{\partial t}\Big[\sum_{|\mathbf{i}|=r} \partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})\Big] =$$

$$d\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})\Big]B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) + e\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial v}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})\Big]B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) +$$

$$f\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial w}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})\Big]B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) + g\sum_{|\mathbf{i}|=r}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})\Big]B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) =$$

$$d\sum_{|\mathbf{i}|=r}\partial^{\mathbf{i}+\mathbf{e_1}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) + e\sum_{|\mathbf{i}|=r}\partial^{\mathbf{i}+\mathbf{e_2}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) +$$

$$f\sum_{|\mathbf{i}|=r}\partial^{\mathbf{i}+\mathbf{e_3}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) + g\sum_{|\mathbf{i}|=r}\partial^{\mathbf{i}+\mathbf{e_4}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{d}) =$$

$$d\sum_{|\mathbf{i}|=r+1}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}}(\mathbf{d}) + e\sum_{|\mathbf{i}|=r+1}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}}(\mathbf{d}) +$$

$$f\sum_{|\mathbf{i}|=r+1}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_3}}(\mathbf{d}) + g\sum_{|\mathbf{i}|=r+1}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_4}}(\mathbf{d}) =$$

$$\sum_{|\mathbf{i}|=r+1}\partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})\Big[dB^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_1}}(\mathbf{d}) + eB^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_2}}(\mathbf{d}) + fB^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_3}}(\mathbf{d}) + gB^r_{\mathbf{i}-\mathbf{e_4}}(\mathbf{d})\Big]$$

Použitím **Vety 1.2.1** dostaneme:

$$D^{r+1}_{\mathbf{d}}B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=r+1} \partial^{\mathbf{i}}B^n(\mathbf{u})B^{r+1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{d})$$

Veta 1.3.8 *Pre $r-$tú smerovú deriváciu Bézierovho štvorstena $B^n(\mathbf{u})$ platí:*

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) V^{n-r}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=n-r} B^{n-r}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}) V^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})$$

Dôkaz: Platí:

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = D^r_{\mathbf{d}} \Big[\sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \Big] = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} D^r_{\mathbf{d}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Pomocou **Vety 1.2.2** dostaneme:

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} \Big[\frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^{n-r}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) \Big] = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} B^{n-r}_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d})$$

Oznacme $\mathbf{k} := \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Potom:

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} \sum_{|\mathbf{k}|=n-r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) \sum_{|\mathbf{k}|=n-r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) V^{n-r}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u})$$

V poslednej rovnosti sme využili **Vetu 1.3.1**. Podobnou úpravou dostaneme druhú dokazovanú rovnosť:

$$D^r_{\mathbf{d}} B^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} \sum_{|\mathbf{k}|=n-r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) =$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{k}|=n-r} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \sum_{|\mathbf{j}|=r} V_{\mathbf{j}+\mathbf{k}} B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{d}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{k}|=n-r} B^{n-r}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) V^r_{\mathbf{k}}(\mathbf{d})$$

1.4 Bézierove telesá tenzorového súčinu.

Definícia 1.4.1 *Nech je dané:*

- *stupne Bézierovho telesa tenzorového súčinu, označenie n, m, o*
- *sieť riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}} \in E^3$, kde $\mathbf{i}$ je trojindex, $\mathbf{i} = (i, j, k)$ $0 \leq i \leq n, 0 \leq l \leq m, 0 \leq k \leq o$. Zadanú sieť riadiacich vrcholov je možné schematicky zobraziť v tvare kvádrovej štruktúry s vrcholmi v bodoch*

$$V_{(0,0,0)}, V_{(n,0,0)}, V_{(0,m,0)}, V_{(n,m,0)}, V_{(0,0,o)}, V_{(n,0,o)}, V_{(0,m,o)}, V_{(n,m,o)}$$

- *Nech je daný kváder $ABCDEFGH$, ktorý budeme nazývať definičným oborom Bézierovho telesa tenzorového súčinu.*

Teraz môžeme definovať Bézierove teleso tenzorového súčinu pomocou analytického vyjadrenia:

- *majme daný bod P z definičného oboru Bézierovho telesa tenzorového súčinu a nech* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *sú po rade dvojrozmerné barycentrické súradnice kolmého priemetu bodu P na priamky AB, AD, AE vzhľadom na body A, B (resp. A, C resp. A, E)*

- *bod Bézierovho telesa tenzorového súčinu stupňov n, m, o so sieťou riadiacich vrcholov $V_{\mathbf{i}}$ pre $\mathbf{i} = (i, j, k)$ $0 \le i \le n, 0 \le l \le m, 0 \le k \le o$ prislúchajúci parametrom* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *budeme označovať ako $B^{n,m,o}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ a definujeme ako*

$$B^{n,m,o}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \sum_{|\mathbf{j}|=m} \sum_{|\mathbf{k}|=o} V_{(i_1, j_1, k_1)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})$$

  kde $B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}), B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}), B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})$ sú zovšeobecnené Bernsteinove polynómy druhého stupňa, $\mathbf{i} = (i_1, i_2), \mathbf{j} = (j_1, j_2), \mathbf{k} = (k_1, k_2)$.

Bézierove teleso tenzorového súčinu sa nedá vo všeobecnosti vyjadriť pomocou rekurzívneho Casteljauovho algoritmu, preto je definované analytickým vyjadrením. Len v prípade $n = m = o$ sa to dá tak, ako hovorí nasledujúca veta.

Veta 1.4.1 *Majme dané Bézierove teleso tenzorového súčinu stupňov n, n, n. Definujme $V^0_{(i,j,k)} = V_{(i,j,k)}$ pre $0 \le i, j, k \le n$. Ďalej rekurzívne definujme*

$$V^r_{(i,j,k)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (1-u)(1-v)(1-w)V^{r-1}_{(i,j,k)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (1-u)v(1-w)V^{r-1}_{(i,j+1,k)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) +$$
$$u(1-v)(1-w)V^{r-1}_{(i+1,j,k)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + uv(1-w)V^{r-1}_{(i+1,j+1,k)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) +$$
$$(1-u)(1-v)wV^{r-1}_{(i,j,k+1)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (1-u)vwV^{r-1}_{(i,j+1,k+1)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) +$$
$$u(1-v)wV^{r-1}_{(i+1,j,k+1)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + uvwV^{r-1}_{(i+1,j+1,k+1)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

pre $\mathbf{u} = (u, 1-u), \mathbf{v} = (v, 1-v), \mathbf{w} = (w, 1-w)$,$r = 1, ..., n$ a $i, j, k = 0, 1, ..., n-r$. Potom platí

$$V^r_{(i_0,j_0,k_0)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{|\mathbf{i}|=r} \sum_{|\mathbf{j}|=r} \sum_{|\mathbf{k}|=r} V_{(i_1+i_0, j_1+j_0, k_1+k_0)} B^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^r_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})$$

pre $i_0, j_0, k_0 = 0, 1, ..., n-r$. Potom pre $r = n$ dostaneme

$$V^n_{(0,0,0)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \sum_{|\mathbf{j}|=n} \sum_{|\mathbf{k}|=n} V_{(i,j,k)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^n_{\mathbf{k}}(\mathbf{w}) = B^{n,n,n}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Dôkaz: Tak ako v prípade podobnej vety pre Bézierove štvorsteny sa použije matematická indukcia. V indukčnom kroku sa po dosadení predpokladu a úprave použije viackrát **Veta 1.2.1b** pre zovšeobecnené Bernsteinove polynómy druhého rádu.

Pre všeobecné Bézierove telesá tenzorového súčinu sa môže použiť krivkový Casteljauov algoritmus pre každý smer zvlášť. Najprv sa urobí tento algoritmus pre všetky krivky v $\mathbf{u}$ smere. Tieto majú riadiaci polygón $(V_{0,j,k}, V_{1,j,k}, ..., V_{m,j,k})$. Keď urobíme tento algoritmus pre všetky $j = 0, ..., n; k = 0, ..., o$, dostaneme $(m + 1).(o + 1)$ bodov. Na tieto body sa znova aplikuje $m + 1$ krivkových Casteljauových algoritmov vo $\mathbf{v}$ smere, dostaneme $o + 1$ bodov a na ne sa nakoniec aplikuje jeden krivkový Casteljauov algoritmus a tým dotaneme príslušný bod. Ďalej nám z tohto algoritmu vychádzajú aj čiastkové vrcholy ktoré sa dajú použiť ako lepšia aproximácia nášho telesa.

Veta 1.4.2 *(Vlastnosti Bézierovho telesa tenzorového súčinu) Pre Bézierove teleso tenzorového súčinu platí:*

a) Je afinne invariantné

b) Patrí do konvexného obalu svojich riadiacich bodov

c) Jeho rohové body sú totožné s rohovými bodmi riadiacej siete, t.j. sem patria body $V_{(0,0,0)}, V_{(n,0,0}, V_{(0,m,0)}, V_{(n,m,0)}, V_{(0,0,o)}, V_{(n,0,o)}, V_{(0,m,o)}, V_{(n,m,o)}$.

d) Hraničné plochy sú Bézierove záplaty tenzorového súčinu, hraničné krivky sú Bézierove oblúky.

e) Zvyšovať stupeň sa dá po zložkách, napr. ak chceme zvýšiť stupeň telesa v $\mathbf{u}$ *smere, urobíme zvýšenie pre všetky krivky v* $\mathbf{u}$ *smere, čiže táto vlastnosť sa zredukuje na zvyšovanie stupňa Bézierovej krivky.*

Dôkaz predchádzajúcej vety neuvádzam, dokáže sa analogicky ako podobná veta pre Bézierove štvorsteny.
Derivácia Bézierovho telesa tenzorového súčinu sa robia pre každý parameter zvlášť, preto sa možu použiť jednoduchšie postupy pre derivácie Bézirových kriviek.

1.5 Racionálne Bézierove telesá.

Definícia 1.5.1 *Racionálne Bézierove telesá pridávajú ku každému vrcholu riadiacej reálny parameter, ktorý nazývame váha daného bodu. Pre racionálne Bézierove štvorsteny je definované analytické vyjadrenie ako:*

$$RB^n(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{|\mathbf{j}|=n} w_{\mathbf{j}} V_{\mathbf{j}} B^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{j}|=n} w_{\mathbf{j}} B^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{u})}$$

a pre racionálne Bézierove telesá tenzorového súčinu

$$RB^{n,m,o}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n}\sum_{|\mathbf{j}|=m}\sum_{|\mathbf{k}|=o} w_{(i_1,j_1,k_1)} V_{(i_1,j_1,k_1)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n}\sum_{|\mathbf{j}|=m}\sum_{|\mathbf{k}|=o} w_{(i_1,j_1,k_1)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})}$$

kde $w_{\mathbf{j}}$ *resp.* $w_{(i_1,j_1,k_1)}$ *sú váhy bodov* $V_{\mathbf{j}}$ *resp.* $V_{(i_1,j_1,k_1)}$.

Existuje aj alternatívna definícia, ktorá využíva základy projektívnej geometrie v E^4. Vložením telesa do E^4 s pomocou váh a následná projekcia do E^3 dáva všeobecnejšiu triedu telies.

Definícia 1.5.2 *Majme danú riadiacu sieť* $V_{\mathbf{j}}$ *resp.* $V_{(i_1,j_1,k_1)}$ *v* E^3 *a pre každý vrchol siete jeho váhu* $w_{\mathbf{j}}$ *resp.* $w_{(i_1,j_1,k_1)}$. *Následne vložíme tieto body do priestoru* E^4 *nasledovne:*

$$V_{\mathbf{j}} = [x_{\mathbf{j}}, y_{\mathbf{j}}, z_{\mathbf{j}}] \longrightarrow V_{\mathbf{j}}^w = [w_{\mathbf{j}}x_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}}y_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}}z_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}}]$$

$$V_{(i_1,j_1,k_1)} = [x_{(i_1,j_1,k_1)}, y_{(i_1,j_1,k_1)}, z_{(i_1,j_1,k_1)}]$$

$$\downarrow$$

$$V_{(i_1,j_1,k_1)}^w = [w_{(i_1,j_1,k_1)}x_{(i_1,j_1,k_1)}, w_{(i_1,j_1,k_1)}y_{(i_1,j_1,k_1)}, w_{(i_1,j_1,k_1)}z_{(i_1,j_1,k_1)}, w_{(i_1,j_1,k_1)}]$$

Teraz sa v E^4 *vymodeluje obyčajné Bézierove teleso s riadiacou sieťou* $V_{\mathbf{j}}^w$ *resp.* $V_{(i_1,j_1,k_1)}^w$ *a toto teleso sa projektívne premietne v smere štvrtej súradnicovej osi do nadplochy* xyz. *Týmto postupom dostaneme racionálny Bézierov štvorsten resp. racionálne Bézierove teleso tenzorového súčinu.*

Veta 1.5.1 *Definície* **1.5.1** *a* **1.5.2** *sú ekvivalentné*

Dôkaz: Ukážeme, že vložením do E^4 a následnou projekciou do E^3 spomínaným v definícii **1.5.2** dostaneme analytické vyjadrenie racionálneho Bézierovho telesa. Pre analytické vyjadrenie racionálneho Bézierovho štvorstena po vnorení máme:

$$B^{w,n}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}}^w B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} [w_{\mathbf{j}}x_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}}y_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}}z_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}}]B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) =$$

$$[\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{j}}x_{\mathbf{j}}B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}), \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{j}}y_{\mathbf{j}}B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}), \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{j}}z_{\mathbf{j}}B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}), \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{j}}B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})]$$

Projektívna projekcia z E^4 do E^3 sa analyticky uskutoční predelením prvých troch súradníc štvrtou súradnicou. Tým dostaneme jednoducho analytické vyjadrenie racionálneho Bézierovho štvorstena. Vyjadrenie racionálneho Bézierovho telesa tenzorového súčinu ako aj opačná implikácia sa dokážu analogicky.

Racionálne Bézierove telesá tvoria zovšeobecnenie obyčajných Bézierovych telies, pretože nahrádzajú polynomické bázické funkcie racionálnymi:

$$\frac{\sum_{|\mathbf{j}|=n} w_{\mathbf{j}}V_{\mathbf{j}}B_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{j}|=n} w_{\mathbf{j}}B_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{u})} = \sum_{|\mathbf{i}|=n} V_{\mathbf{i}} \frac{w_{\mathbf{i}}B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{j}|=n} w_{\mathbf{j}}B_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{u})}$$

$$\frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n}\sum_{|\mathbf{j}|=m}\sum_{|\mathbf{k}|=o} w_{(i_1,j_1,k_1)} V_{(i_1,j_1,k_1)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n}\sum_{|\mathbf{j}|=m}\sum_{|\mathbf{k}|=o} w_{(i_1,j_1,k_1)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})} =$$

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n}\sum_{|\mathbf{j}|=m}\sum_{|\mathbf{k}|=o} V_{(i_1,j_1,k_1)} \frac{w_{(i_1,j_1,k_1)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n}\sum_{|\mathbf{j}|=m}\sum_{|\mathbf{k}|=o} w_{(i_1,j_1,k_1)} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^m_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) B^o_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})}$$

Podobne ako v prípade obyčajných Bézierovych telies, aj v prípade racionálneho Bézierovho štvorstena resp. špeciálneho prípadu Bézierovho telesa tenzorového súčinu ($n = m = o$) existuje rekurzívny Casteljauov algoritmus na výpočet bodu telesa pre dané parametre. Tento algoritmus sa dostane aplikovaním štandardného Casteljauovho algoritmu na teleso vnorené do E^4 a následnou projekciou do E^3. Potom v prípade Bézierovho štvorstena sú vzťahy algoritmu nasledovné:

$$V^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{w^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})}\Big[uw^{r-1}_{\mathbf{i+e_1}}(\mathbf{u})V^{r-1}_{\mathbf{i+e_1}}(\mathbf{u}) + vw^{r-1}_{\mathbf{i+e_2}}(\mathbf{u})V^{r-1}_{\mathbf{i+e_2}}(\mathbf{u}) + ww^{r-1}_{\mathbf{i+e_3}}(\mathbf{u})V^{r-1}_{\mathbf{i+e_3}}(\mathbf{u}) +$$

$$tw^{r-1}_{\mathbf{i+e_4}}(\mathbf{u})V^{r-1}_{\mathbf{i+e_4}}(\mathbf{u})\Big] \qquad r = 1,..,n; |\ \mathbf{i}\ | = n - r$$

kde $w^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$ je rekurzívne definované ako:

$$w^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = uw^{r-1}_{\mathbf{i+e_1}}(\mathbf{u}) + vw^{r-1}_{\mathbf{i+e_2}}(\mathbf{u}) + ww^{r-1}_{\mathbf{i+e_3}}(\mathbf{u}) + tw^{r-1}_{\mathbf{i+e_4}}(\mathbf{u}) \qquad r = 1,..,n; |\ \mathbf{i}\ | = n - r$$

pre $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$ A potom máme:

$$V^n_{\mathbf{0}}(\mathbf{u}) = RB^n(\mathbf{u})$$

V prípade Bézierovho telesa tenzorového súčinu pre $n = m = o$ máme:

$$V^0_{(i,j,k)} = V_{(i,j,k)}; 0 \le i, j, k \le n$$

$$V^r_{(i,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{1}{w^r_{(i,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})}[(1-u)(1-v)(1-w)w^{r-1}_{(i,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) +$$

$$(1-u)v(1-w)w^{r-1}_{(i,j+1,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i,j+1,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + u(1-v)(1-w)w^{r-1}_{(i+1,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i+1,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) +$$

$$uv(1-w)w^{r-1}_{(i+1,j+1,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i+1,j+1,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + (1-u)(1-v)ww^{r-1}_{(i,j,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i,j,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) +$$

$$(1-u)vww^{r-1}_{(i,j+1,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i,j+1,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + u(1-v)ww^{r-1}_{(i+1,j,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i+1,j,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) +$$

$$uvww^{r-1}_{(i+1,j+1,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})V^{r-1}_{(i+1,j+1,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})]$$

Postupné váhy sa vypočítajú podľa vzťahu:

$$w^0_{(i,j,k)} = w_{(i,j,k)}; 0 \le i, j, k \le n$$

$$w^r_{(i,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = (1-u)(1-v)(1-w)w^{r-1}_{(i,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + (1-u)v(1-w)w^{r-1}_{(i,j+1,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) +$$

$$u(1-v)(1-w)w^{r-1}_{(i+1,j,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + uv(1-w)w^{r-1}_{(i+1,j+1,k)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) +$$

$$(1-u)(1-v)ww^{r-1}_{(i,j,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + (1-u)vww^{r-1}_{(i,j+1,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) +$$
$$u(1-v)ww^{r-1}_{(i+1,j,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + uvww^{r-1}_{(i+1,j+1,k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$$

Všetky vsťahy sa počítajú pre $\mathbf{u} = (u, 1-u), \mathbf{v} = (v, 1-v), \mathbf{w} = (w, 1-w)$,$r = 1, ..., n$ a $i, j, k = 0, 1, ..., n-r$. Potom platí

$$V^n_{(0,0,0)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = RB^{n,n,n}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$$

Pre racionálne Bézierove telesá platiatie isté vlastnosti ako pre obyčajné telesá, väčšinou sa tieto vlastnosti dajú ukázať z analytického vyjadrenia. Derivácia sa počíta ako derivácia podielu dvoch funkcií, takže dostávame zložitejšie výrazy, ktoré sa daju ťažšie vyjadriť analyticky pre deriváciu ľubovoľného rádu.

Kapitola 2

Vizualizácia Bézierových telies

2.1 Siete bodov

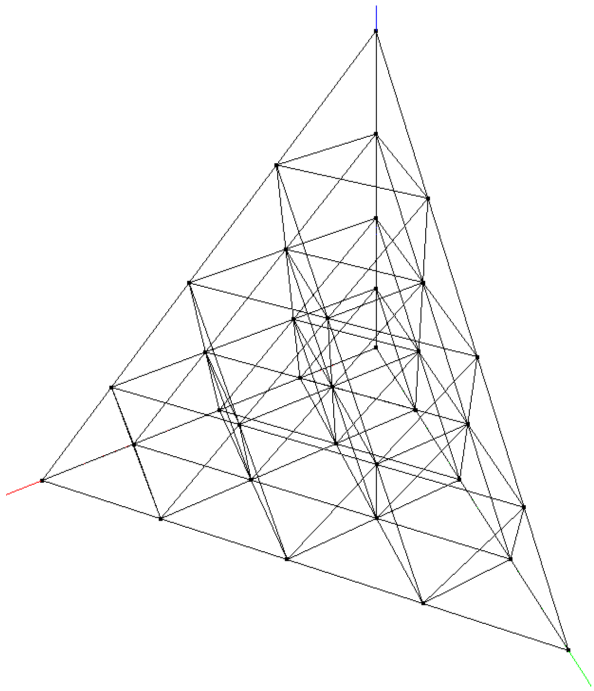
Pretože sa zaoberáme trojrozmernými útvarmi (telesami), budeme používať trojrozmerné siete bodov. Najzákladnejšie dve konfigurácie bodov v sieti sú štvorstenná a kvádrová. Budeme ich používať hlavne preto, lebo majú úzky súvis s dvoma základnými druhmi Bézierovych telies. Okrem bodov máme v tejto štruktúre zavedenú topológiu, t.j. máme dané spojenie bodu s jeho sesednými bodmi. Tieto siete bodov sú definované nasledovne:

Definícia 2.1.1 *Štvorstenná sieť bodov rozmeru n je množina bodov v priestore, ktorá sa dá usporiadať tak, aby sme ju mohli zapísať v tvare:*$V_{\mathbf{i}} \in E^3; \mathbf{i} = (i,j,k,l); 0 \leq i,j,k,l \leq n; \mid \mathbf{i} \mid = i+j+k+l = n$. *Pre bod* $V_{i,j,k,l}$ *máme daných jeho susedov nasledovne:*$V_{i-1,j+1,k,l}, V_{i-1,j,k+1,l}, V_{i-1,j,k,l+1}, V_{i+1,j-1,k,l}, V_{i,j-1,k+1,l}, V_{i,j-1,k,l+1}, V_{i+1,j,k-1,l+1}, V_{i,j+1,k-1,l}, V_{i,j,k-1,l+1}, V_{i+1,j,k,l-1}, V_{i,j+1,k,l-1}, V_{i,j,k+1,l-1}$. *Samozrejme musia patriť index pri danom susedovi do príslušných hraníc, ináč sused neexistuje.*

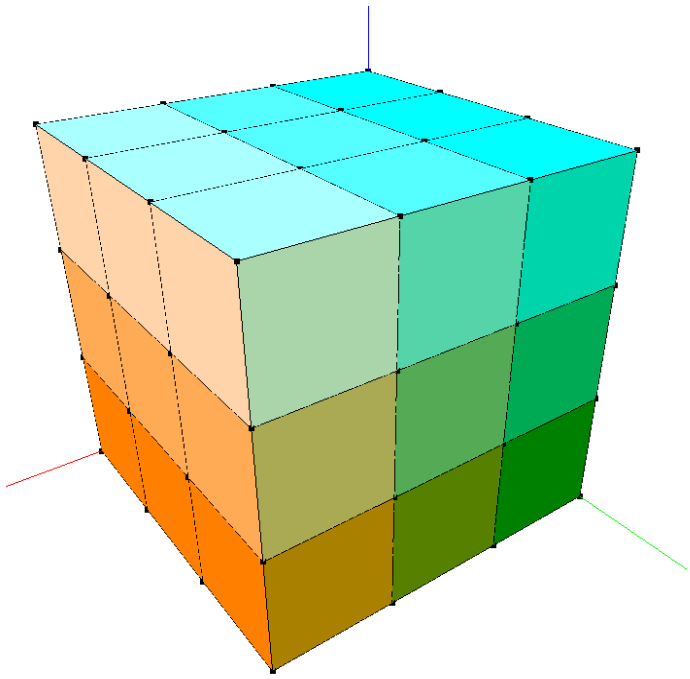
Definícia 2.1.2 *Kvádrová sieť bodov rozmerov n,m,o je množina bodov v priestore, ktorá sa dá usporiadať tak, aby sme ju mohli zapísať v tvare:*$V_{(i,j,k)} \in E^3; 0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq m; 0 \leq k \leq o$. *Pre bod* $V_{i,j,k}$ *máme daných jeho susedov nasledovne:*$V_{i-1,j,k}, V_{i+1,j,k}, V_{i,j-1,k}, V_{i,j+1,k}, V_{i,j,k-1}, V_{i,j,k+1}$. *Index pri danom susedovi musí patriť do príslušných hraníc, ináč sused neexistuje.*

Ak teraz porovnáme tieto definície s definíciami Bézierových telies, vidíme, že riadiaca siet Bézieroveho štvorstena resp. Bézierovho telesa tenzorového súčinu sa dá napísť aj ako štvorstenná resp. kvádrová sieť bodov. Pre počet bodov siete bodov platí nasledujúce tvrdenie:

Veta 2.1.1 *Kvádrová sieť bodov obsahuje* $(n+1)(m+1)(o+1)$ *bodov, štvorstenná sieť bodov obsahuje* $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ *bodov.*



Obr. 2.1: Jednoduchá štvorstenná sieť bodov s vykreslenými vrcholmi a hranami.



Obr. 2.2: Jednoduchá kvádrová sieť bodov s vykreslenými vrcholmi, hranami a trojuholníkmi.

Dôkaz: Pre kvádrovú sieť bodov je dôkaz jednoduchý, pretože pre i máme n+1 možností, pre j máme m+1 možností a pre k máme o+1 možností, potom pre index (i,j,k) máme $(n+1)(m+1)(o+1)$ možností, čo je aj počet bodov kvádrovej siete bodov. V prípade štvorstennej siete bodov máme index (i,j,k,l) taký, že $i+j+k+l=n$. Keď položíme i ako pevné,$0 \leq i \leq n$, dostaneme $j+k+l=n-i$. Teraz keď položíme aj j pevné,$0 \leq j \leq n-i$, dostaneme $k+l=n-i-j$. Pretože teraz $0 \leq k \leq n-i-j$, máme pre k $(n-i-j+1)$ možností (l je závislá od k, preto ju nezarátame). Teraz keď berieme $j=0,...,n-i$, dostávame pre j a k $[(n-i+1)+(n-i)+...+1]$ možností, t.j. $\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2}$ možností. Posledná vec je brať i z intervalu 0,…,n a potom pre i,j,k dostávame $[\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n}{2}+...+\frac{2.1}{2}]$ možností, t.j. $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ možností, čo je aj počet bodov štvorstennej siete bodov. Výpočet súm spomýnaných v dôkaze sa dá ľahko ukázať pomocou matematickej indukcie.

Na znázornenie definovaných sietí bodov je často potrebná ich vizualizácia. Vizualizovať sa môžu vrcholy siete, hrany ktoré spájajú susedné vrcholy siete a aj množina trojuholníkov siete. Táto množina trojuholníkov sa vytvára tak, že pre každú trojicu bodov, ktoré sú navzájom susedmi, sa pridá trojuholník tvorený týmito vrcholmi. Samozrejme pri tomto postupe treba dávať pozor, aby sa rovnaké trojuholníky neopakovali. V prípade, že nie je potrebné vizualizovať vnútro siete, je možné vykresliť sieť len pomocou bodov, ktoré tvoria hranicu siete. Obrázky 2.1 a 2.2 nám ilustrujú dva základné typy sietí s vizualizáciou možných častí siete.

Pre každý vrchol siete bodov sa može pridávať nepovinný parameter alebo funkcia, ktoré možu určovať vlastnosti bodu v sieti (napr. či sa bod má vykresliť, hustotu v danom bode,…).

2.2 Aproximácia Bézierových telies sieťou bodov

Keďže Bézierove teleso je spojitá štruktúra a na vizualizáciu potrebujeme diskrétnu štruktúru, aproximujeme Bézierove teleso sieťou bodov, v prípade Bézierovho štvorstena použijeme štvorstennú sieť bodov, v prípade Bézierovho telesa tenzorového súčinu použijeme kvádrovú sieť bodov. Taktiež si možeme všimnúť, že aj riadiaca sieť Bézierovho telesa je aproximácia toho telesa pomocou siete bodov, my ale väčšinou potrebujeme lepšiu aproximáciu. Teraz si popíšeme tri metódy na získanie takejto presnejšej siete bodov.

2.2.1 Diskretizácia definičného oboru

V tejto metóde vyberáme z definičného oboru Bézierovho telesa konečný počet bodov, ktoré nám reprezentujú definičný obor. Na takto vybraté hodnoty sa potom aplikuje výpočet bodu Bézierovho telesa pomocou analytického vyjadrenia alebo Casteljauovho algoritmu.

V prípade Bézierovho štvorstena sa používa rozdelenie, pri ktorom sa pre zvolené prirodzené číslo p vyberajú body v tvare $X = \frac{i}{p}A + \frac{j}{p}B + \frac{k}{p}C + \frac{l}{p}D$, kde $i, j, k, l = 0, ..., p$ a $i + j + k + l = p$. Pre každý takto daný bod definičného oboru sa vypočíta príslušný bod Bézierovho štvorstena a ten sa uloží do výslednej štvorstennej siete bodov rozmeru p ako $V_{(i,j,k,l)}$. Číslo p nám určuje presnosť, s akou sa vyberajú body z definičného oboru a teda aj presnosť aproximácie Bézierovho štvorstena.

V prípade Bézierovho telesa tenzorového súčinu sa používa rozdelenie, pri ktorom sa pre zvolené prirodzené čísla p_1, p_2, p_3 vyberajú body v tvare $X = [x, y, z] = [A + \frac{i}{p_1}(B - A), A + \frac{j}{p_2}(D - A), A + \frac{k}{p_3}(A - E)]$, kde $i = 0, ..., p_1; j = 0, ..., p_2; k = 0, ..., p_3;$. Pre každý takto daný bod definičného oboru sa vypočíta príslušný bod Bézierovho telesa tenzorového súčinu a ten sa uloží do výslednej kvádrovej siete bodov rozmerov p_1, p_2, p_3 ako $V_{(i,j,k)}$.

2.2.2 Zvyšovanie stupňa

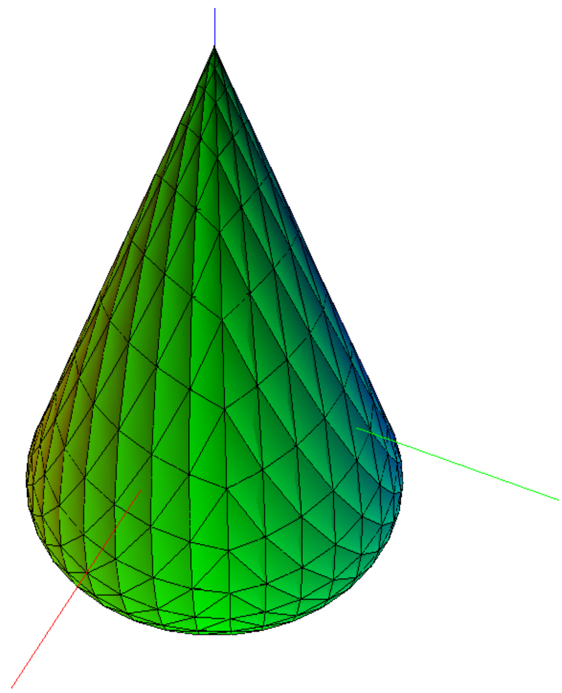
Vieme, že riadiacia sieť Bézierovho telesa je prvou aproximáciou tohto telesa. Keď teraz použijeme na túto riadiacu sieť algoritmus na zvyšovanie stupňa, dostaneme sieť bodov, ktorá je hustejšia a lepšie aproximuje dané teleso, pričom sa stále jedná aj o jeho riadiacu sieť. V prípade Bézierovho telesa je tento krok jednoduchý, v prípade Bézierovho telesa tenzorového súčinu sa musí urobiť zvýšenie stupňa vždy vo všetkých troch smeroch. Tento postup môžeme opakovať pokiaľ nemáme dostatočne presnú aproximáciu Bézierovho telesa.

2.2.3 Casteljauov algoritmus

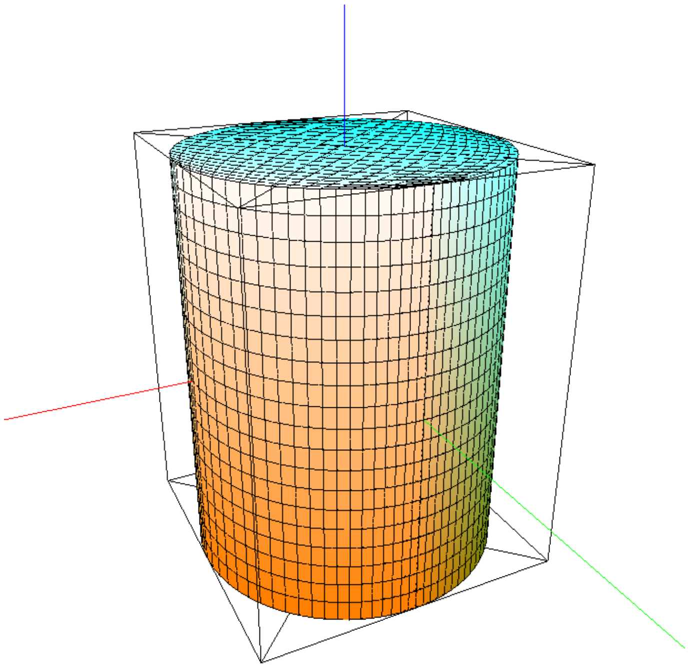
Tento postup je odlišný od predchádzajúcich dvoch. Teraz budeme mať viacero sietí bodov, ktore budú dokopy aproximovať Bézierove teleso. Najprv si ukážeme postup v prípade Bézierovho štvorstena. Na začiatku máme riadiacu sieť ako prvú aproximáciu. Vyberieme bod z definičného oboru a pre tento bod urobíme Casteljauov algoritmus. Jedným z výsledkov tohto algoritmu sú štyri podsiete, ktoré dokopy aproximujú zadaný Bézierov štvorsten. Tieto štyri siete bodov tvoria riadiace siete štyroch Bézierovych štvorstenov s definičnými obormi, ktoré vzniknú rozdelením definičného oboru pomocou vybraného bodu. Preto môžeme tento postup opakovať na tieto štyri Bézierove štvorsteny. Takto dostávame v každom kroku nové siete bodov zo starých, ak nejaká sieť dostatočne aproximuje časť Bézierovho štvorstena, viac sa už nedelí. V prípade Bézierovho telesa tenzorového súčinu sa toto delenie robí v každom smere samostatne, t.j. robí sa len krivkový Casteljauov algopritmus v každom smere. V každom kroku nám potom môže vzniknúť pre danú sieť bodov až 8 nových podsietí.

2.3 Implementácia

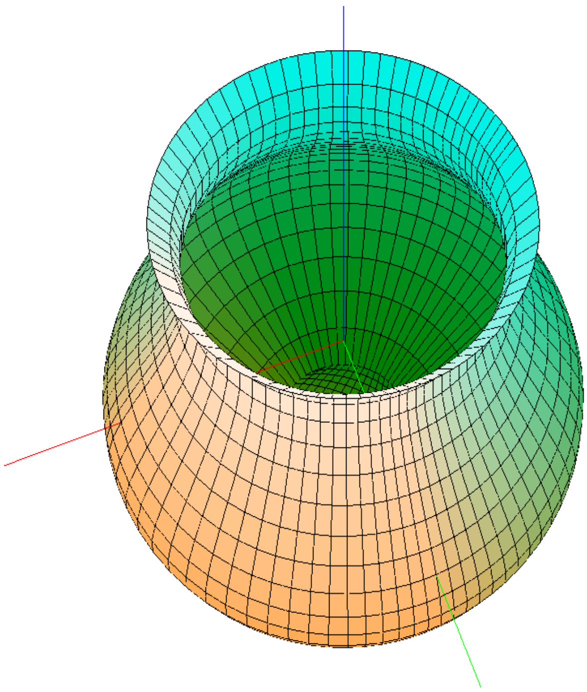
Najdôležitejšou časťou implementácie sú triedy, ktoré obsahujú štvorstennú a kvádrovú sieť bodov a taktiež metódy na naplnenie a vykreslenie týchto štruktúr. Tieto triedy sa potom používajú na uloženie riadiacej siete v triedach, ktoré obsluhujú Bézierove štvorsteny a telesá tenzorového súčinu. Nakoniec sa tieto siete bodov použijú na uskladnenie a vizualizáciu siete, ktorá aproximuje vizualizáciu Bézierových telies sa použije prevod telesa na sieť bodov tak, aby dostatočne aproximoval dané teleso. Nasledovné obrázky zobrazujú rôzne typy a konfigurácie telies v roznych typoch vizualizácie.



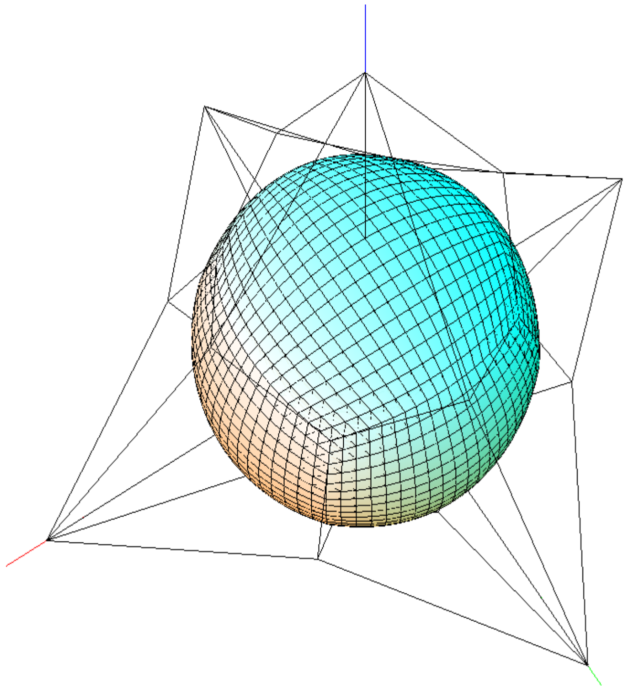
Obr. 2.3: Bézierov štvorsten v tvare kužela. Vykreslené sú hrany a trojuholníky siete bodov.



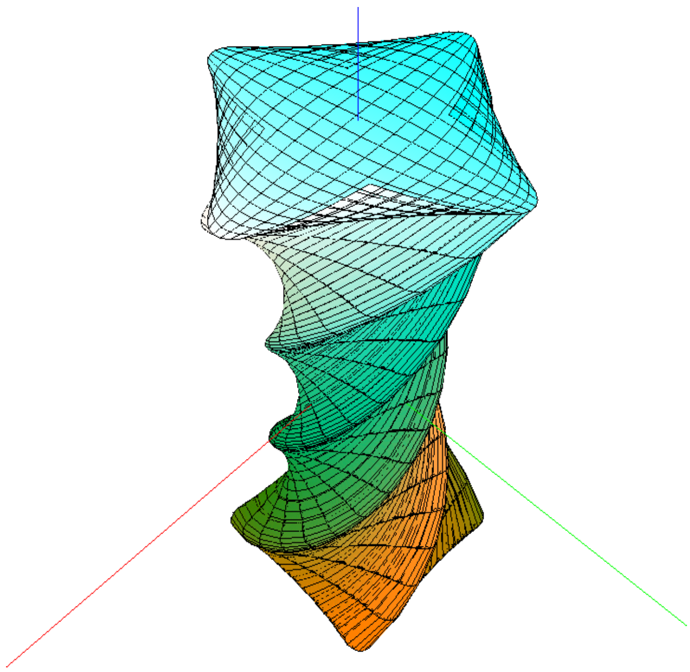
Obr. 2.4: Bézierove teleso v tvare valca s vykreslenou riadiacou sieťou.



Obr. 2.5: Bézierove rotačné teleso s vykreslenou hranicou bez hornej hranice.



Obr. 2.6: Bézierove teleso v gule s vykreslenou riadiacou sieťou.



Obr. 2.7: Bézierove skrutkové teleso.

Poďakovanie

Chcel by som poďakovať doc.RNDr. Valentínovi Zaťkovi, PhD. a RNDr. Andrejovi Ferkovi, PhD., za ich ochotnú pomoc a za mnohé cenné rady a pripomienky pri príprave tejto práce.
Táto práca bola čiastočne podporovaná grantom VEGA Virtual Environments for WWW číslo 1/0174/03.

Literatúra

[1] Farin G. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design - A Practical Guide.* ISBN 0-12-249052-6, Academic Press, Boston, 1993.

[2] Ferko A., Ružický E. *Pocítačová grafika a spracovanie obrazu.* ISBN 80-967180-2-9, SAPIENTIA, Bratislava, 1995.

[3] Žára J. a kol. *Moderní pocítačová grafika.* ISBN 80-7226-049-9, Computer Press, Praha, 1998.

[4] Piegl L., Tiller W. *The NURBS Book.* ISBN 3-540-61545-8, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] OpenGL webpage. *http://www.opengl.org*

[6] Samuelčík M. *Bézierove štvorsteny v* E^4 *a ich aplikácie.* Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2002.