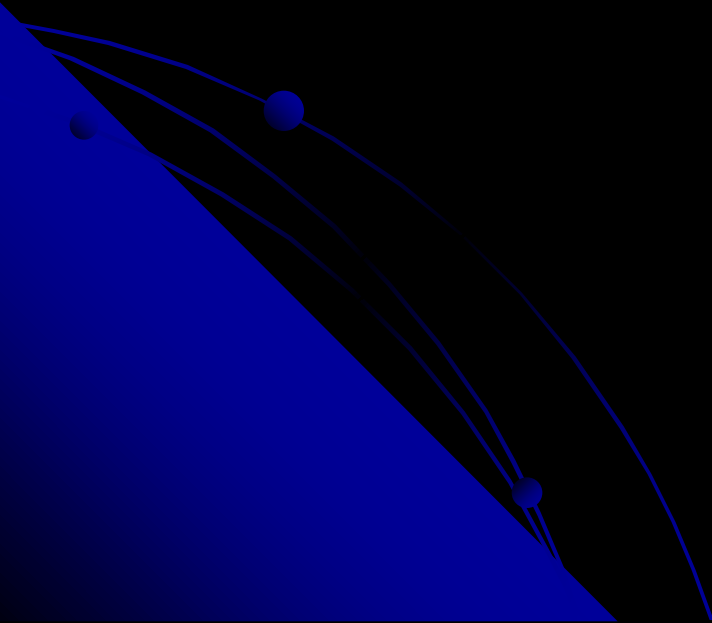
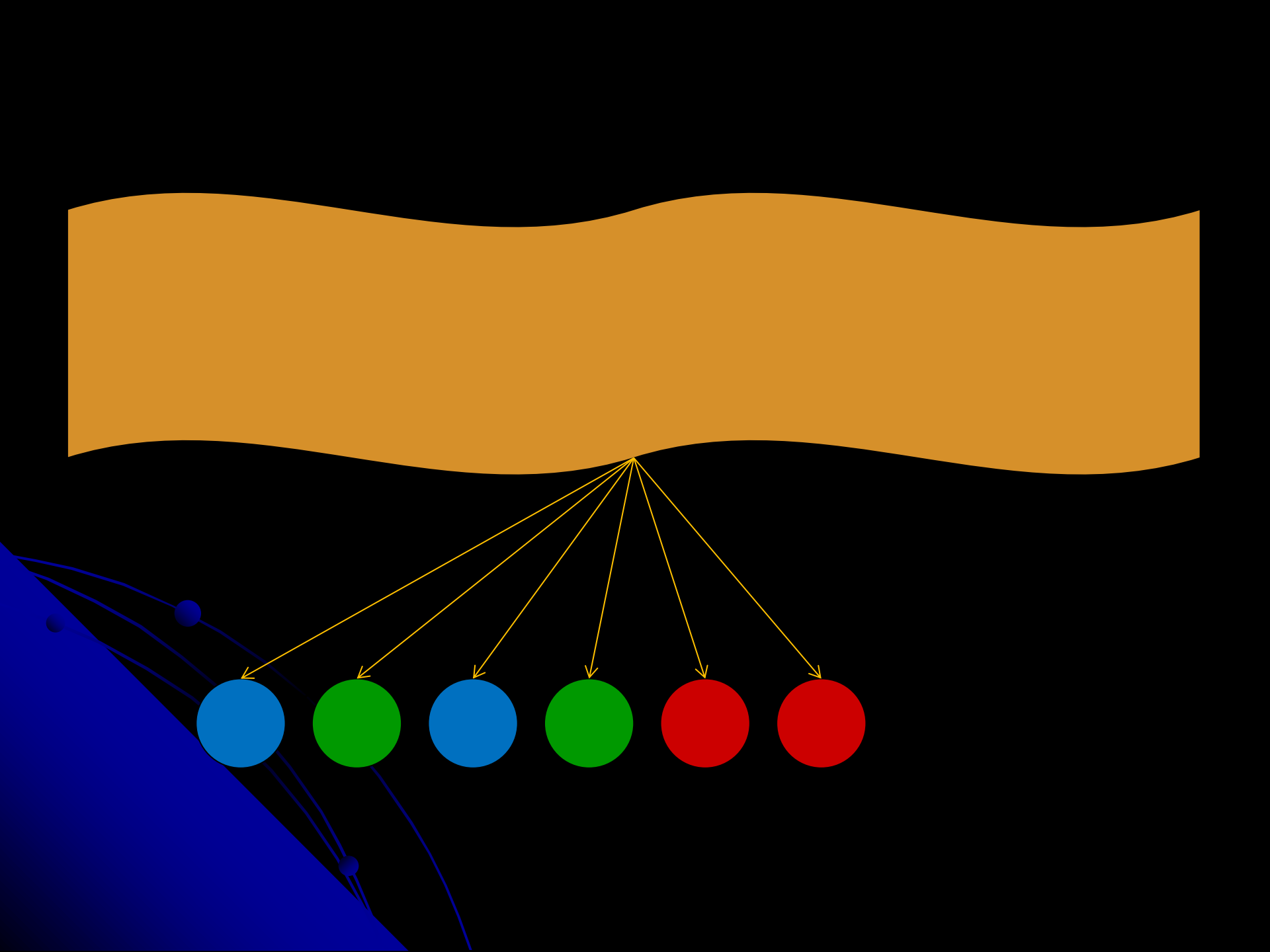
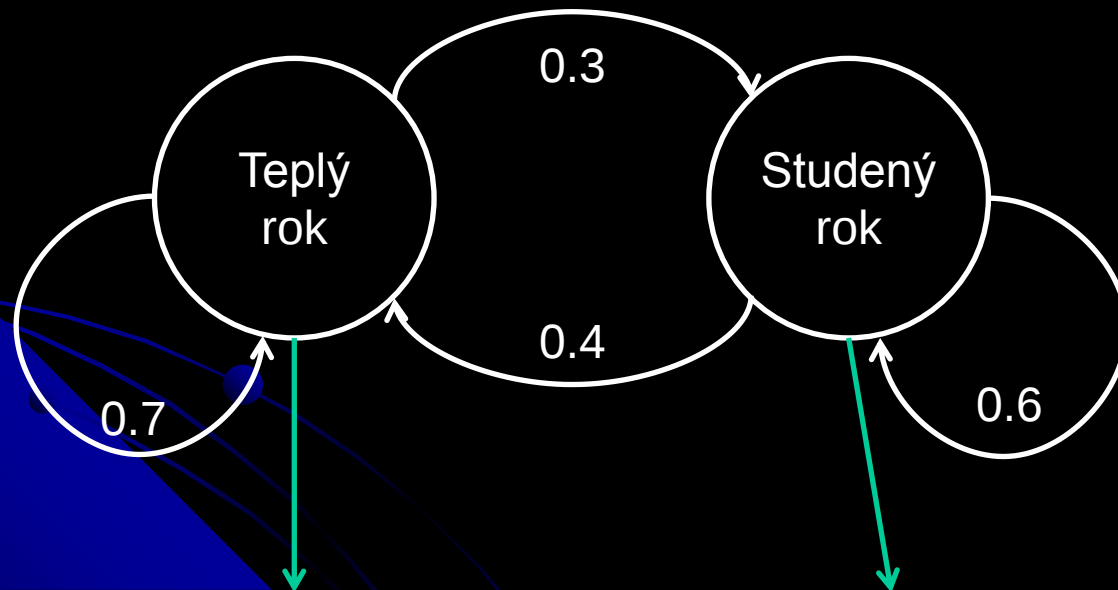


HMM





Chceme zistiť, aká bola priemerná teplota v predchádzajúcich rokoch



úzke	stredné	široké
0.1	0.4	0.5

úzke	stredné	široké
0.7	0.2	0.1



HMM – hidden Markov model

- konečný automat, ktorý mení svoje stavy na základe prechodovej funkcie
- prechod zo stavu do stavu nie je deterministický
- stav, v ktorom sa HMM nachádza, nie je možné zvonku presne určiť
- HMM v každom kroku pošle na výstup nejaký symbol
- pre každý stav je definovaná pravdepodobnosť, s akou sa daný symbol objaví na výstupe

usporiadaná päťica parametrov

$$M = (S; V; \pi; Q; B)$$

$S = \{1, \dots, N\}$ - neprázdna konečná množina stavov

$V = \{y_1, \dots, y_M\}$ - neprázdna konečná množina výstupných symbolov

π_i - pravdepodobnosť, že i je počiatočný stav HMM

Q - prechodová matica ($N \times N$)

B - pravdepodobnosti výstupného symbolu v danom stave ($N \times M$)

matica B pravdepodobnosti výstupného symbolu v danom stave

diskrétné výstupy

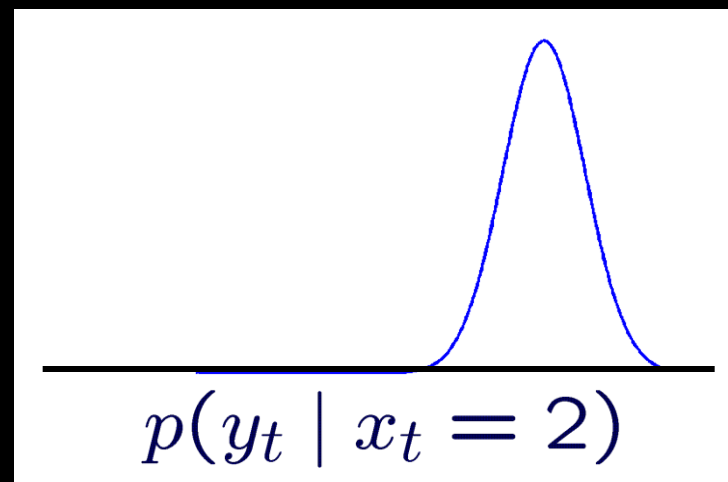
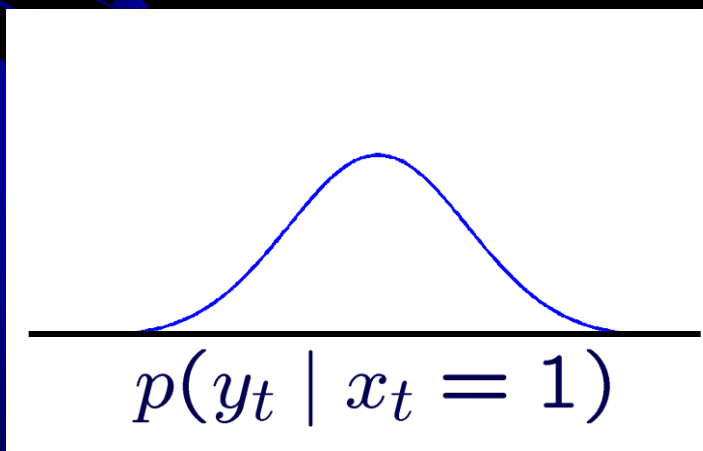
$$y_t \in \{1, 2, \dots, M\}$$

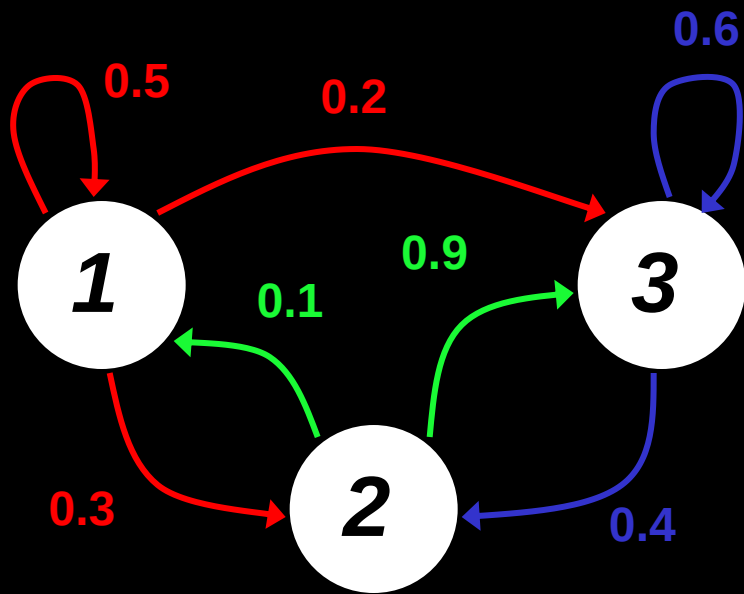
$$p(y_t \mid x_t = 1) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$p(y_t \mid x_t = 2) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

spojité výstupy

$$y_t \in \mathbb{R}^k$$





$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.9 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$q_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^N q_{ij} = 1 \quad \text{for all } j$$

$x_t \in \{1, 2, \dots, N\} \longrightarrow$ stav v čase t

stochastický proces

$$p(x_0, x_1, \dots, x_T) = p(x_0) \prod_{t=1}^T p(x_t \mid x_0, \dots, x_{t-1})$$

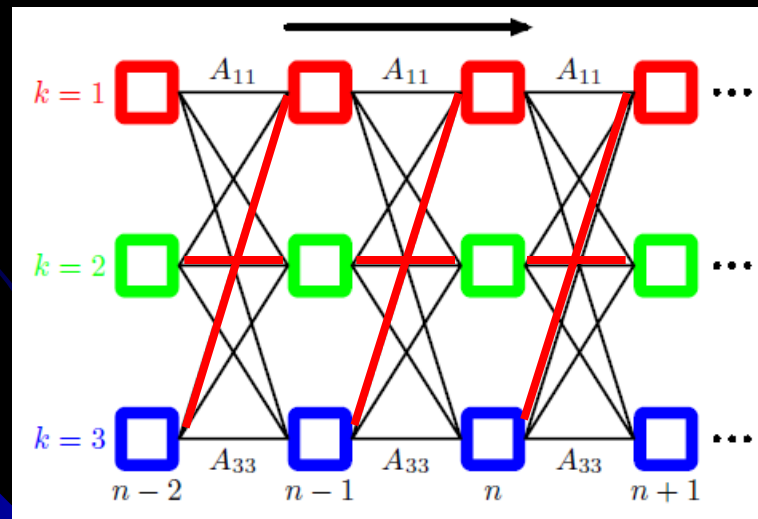
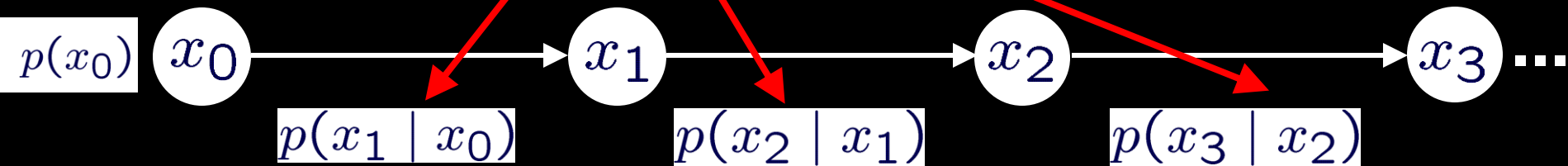
Markovove procesy

$$p(x_{t+1} \mid x_0, \dots, x_t) = p(x_{t+1} \mid x_t)$$

$$p(x_0, x_1, \dots, x_T) = p(x_0) \prod_{t=1}^T p(x_t \mid x_{t-1})$$

$$q_{ij} \triangleq p(x_{t+1} = i \mid x_t = j)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.9 & 0.6 \end{bmatrix}$$



3 problémy

1. Rozpoznávanie – klasifikácia

(dynamické programovanie, algoritmus forward-backward)

Parametre HMM sú dané, spočítame pravdepodobnosť, že pozorujeme postupnosť $O = \{y_1, \dots, y_T\}$.

Každá klasifikačná trieda má vlastné parametre HMM, klasifikujeme do triedy, kde je pravdepodobnosť postupnosti najväčšia

2. Optimálna postupnosť stavov

(dynamické programovanie, algoritmus Viterbi)

Parametre HMM sú dané, máme postupnosť $O = \{y_1, \dots, y_T\}$.

- Aká je najpravdepodobnejšia postupnosť stavov, ktoré zapríčinili výstup O ?

3. Učenie

(algoritmus Baum-Welsh, využíva EM algoritmus)

Daná je štruktúra HMM a trénovacia množina

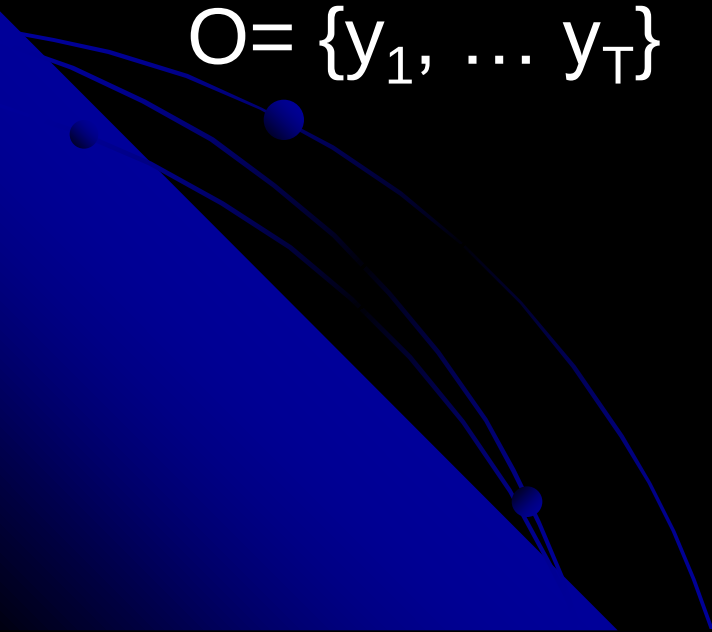
- Treba nájsť parametre modelu

1. Rozpoznávanie – klasifikácia

algorithmus forward-backward

pravdepodobnosť, že pozorujeme postupnosť

$$O = \{y_1, \dots, y_T\}$$



parametre HMM: $M=\{Q,B,\pi\}$

postupnosť $O= \{y_1, \dots y_T\}$

postupnosť stavov X

pravdepodobnosť postupnosti $P(O|M)$

$$P(O | M) = \sum_X P(O, X | M) = \sum_X P(O | X, M) P(X | M)$$

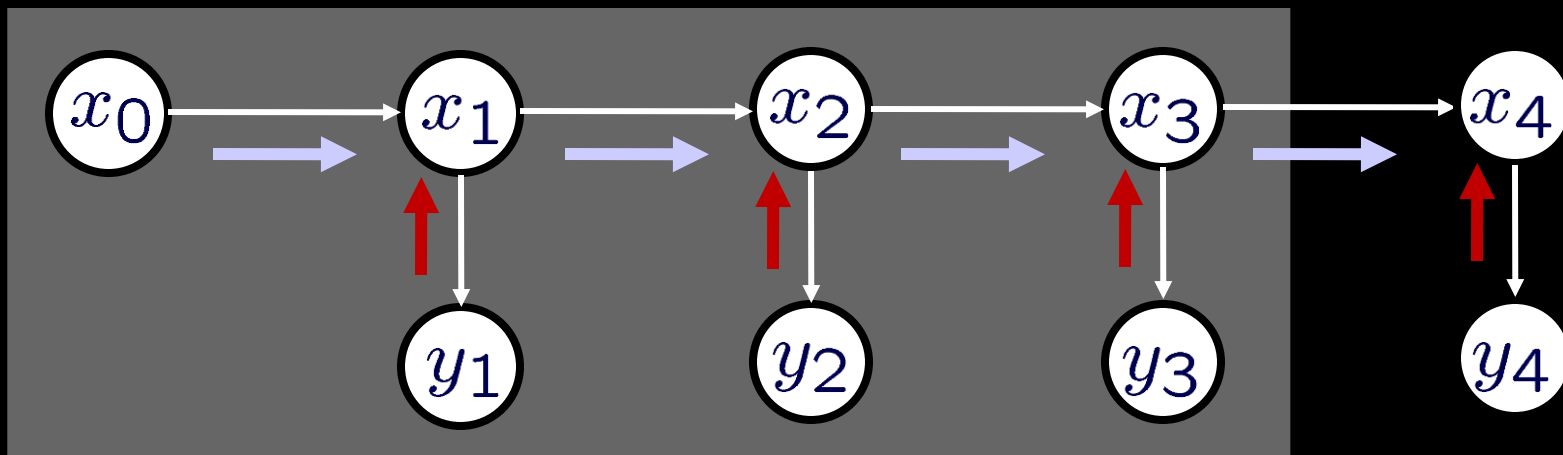
Priamy prístup

$$P(O | M) = \pi_{x_0} \sum_{\{x_0 x_1 \dots x_T\}} \left(B_{x_1 y_1} Q_{x_1 x_0} B_{x_2 y_2} Q_{x_2 x_1} \dots B_{x_T y_T} Q_{x_T x_{T-1}} \right)$$

$O(2TN^T)$ – nerealizovateľné

Riešenie: iteratívne – postupujeme dopredu alebo dozadu

forward

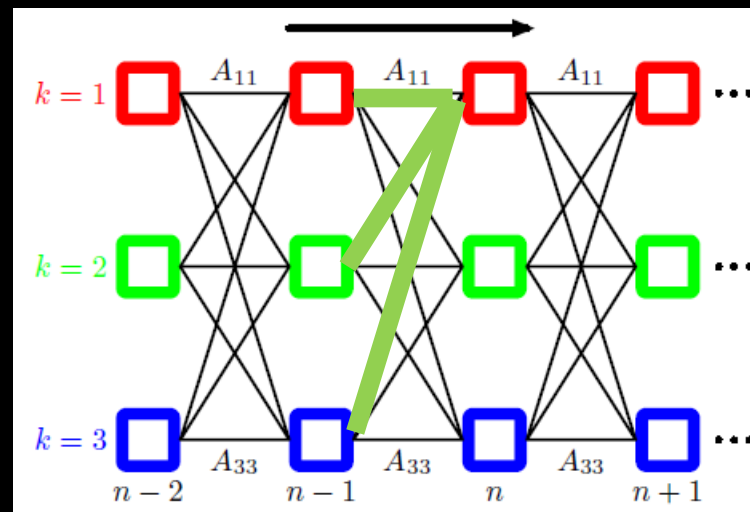


$$\alpha_t(x_t) \triangleq p(y_t | x_t) \sum_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}) \alpha_{t-1}(x_{t-1})$$

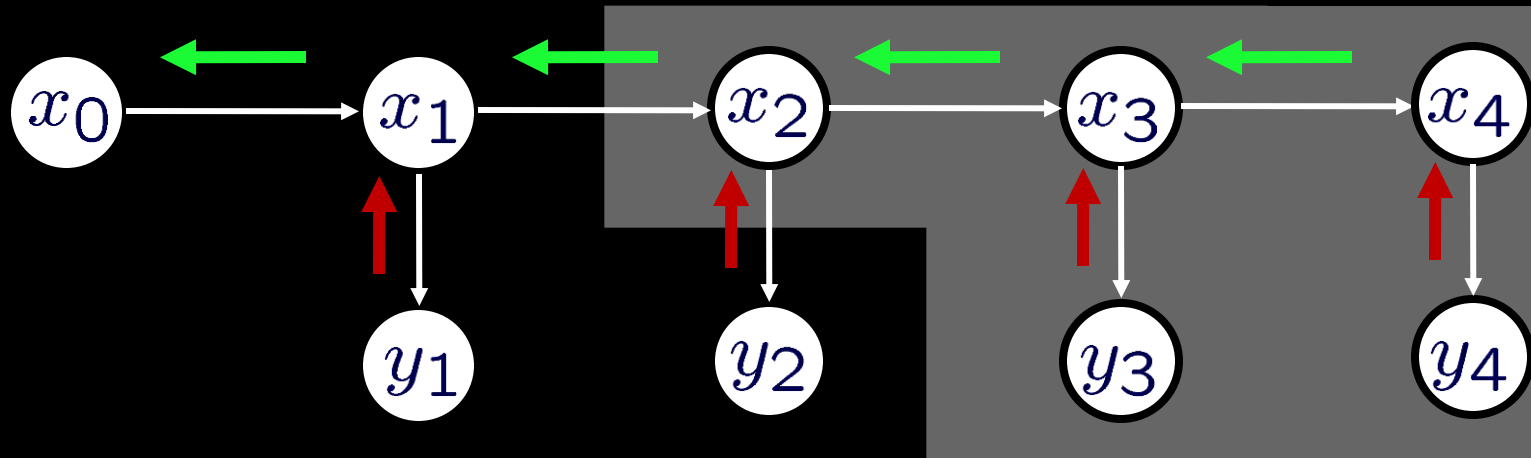
$P(y_1, \dots, y_t, x_t)$

$$\alpha_0(x_0) = \pi(x_0)$$

$$P(O|M) = \sum_{x_T} \alpha_T(x_T)$$



backward



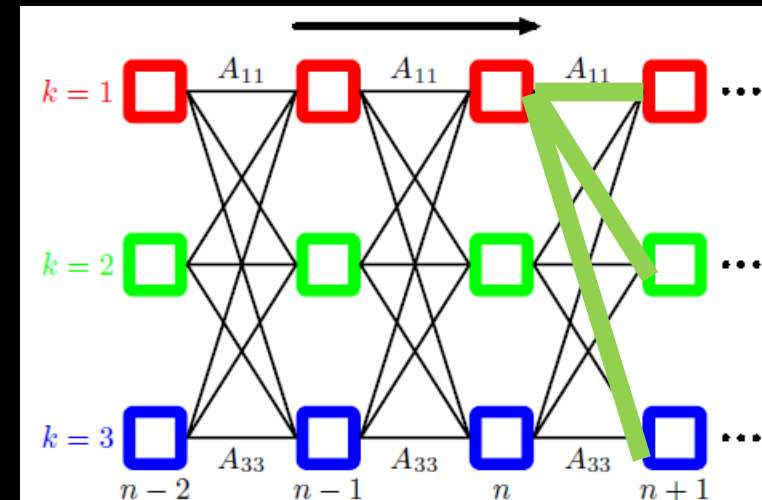
$$\beta_t(x_t) = \sum_{x_{t+1}} p(x_{t+1} | x_t) p(y_{t+1} | x_{t+1}) \beta_{t+1}(x_{t+1})$$

$P(y_{t+1}, \dots, y_T, x_t)$

$$\beta_T(x_T) = 1$$

$$P(O|M) = \sum \pi(x_0) \cdot \beta_0(x_0)$$

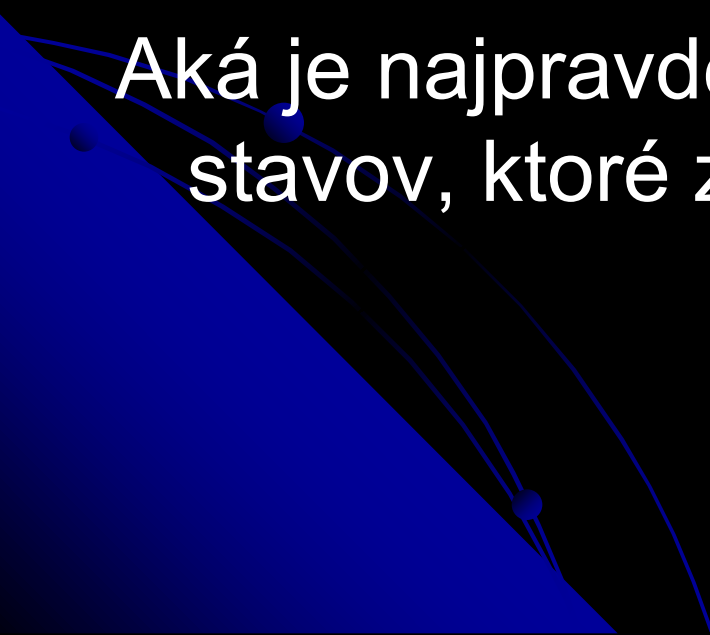
x_0



2. Optimálna postupnosť stavov

algorithmus Viterbi

Aká je najpravdepodobnejšia postupnosť stavov, ktoré zapríčinili výstup O?



1. prístup – optimalizujeme jednotlivé stavy využitím funkcií α a β

$$P(O | M) = \sum_{x_t \in S} \alpha_t(x_t) \beta_t(x_t)$$

Pravdepodobnosť ciest
prechádzajúcich
stavom s v čase t

$$\gamma_t(s) = \frac{\alpha_t(s) \beta_t(s)}{P(O | M)}$$

Optimálny stav v čase t

$$x_t^* = \arg \max_{s \in S} \gamma_t(s)$$

2. prístup – optimalizujeme celú sekvenciu stavov
– Viterbiho algoritmus

Dynamické programovanie – rekurzívne
hľadáme najpravdepodobnejšiu postupnosť

Preskúmame všetky možné koncové stavy

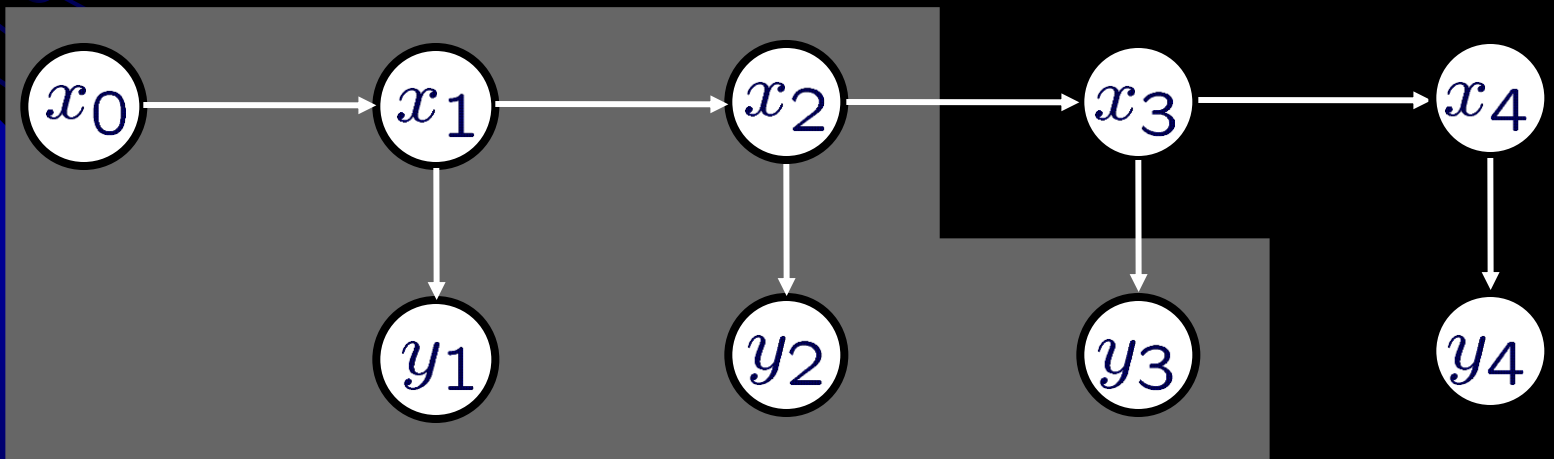
$$x_T \in \{1, \dots, N\}$$

Backtracking

Viterbi

$\delta_t(q)$ – pravdepodobnosť najpravdepodobnejšej postupnosti stavov generujúcich dané výstupy končiacej v čase t v stave q

$$\delta_t(q) = \max_{p_0 p_1 \dots q} P(x_0 = p_0, x_1 = p_1, \dots, x_t = q, y_1, y_2, \dots, y_t \mid M)$$



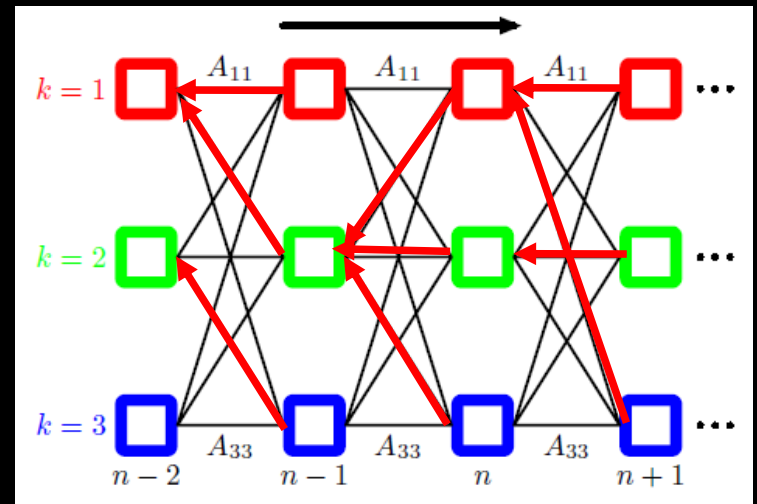
Viterbi

$$\delta_0(i) = \pi_i$$

$$\delta_t(j) = B_{jy_t} \max_i (\delta_{t-1}(i) Q_{ij})$$

$$\psi_0(i) = 0$$

$$\psi_t(j) = \arg \max_i (\delta_{t-1}(i) Q_{ij})$$

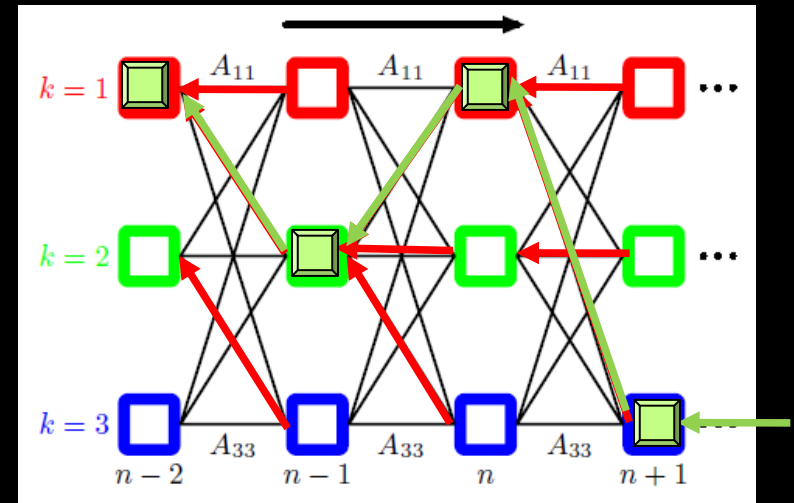


Viterbi

Optimálna postupnosť stavov

$$x_T^* = \arg \max_j \delta_T(j)$$

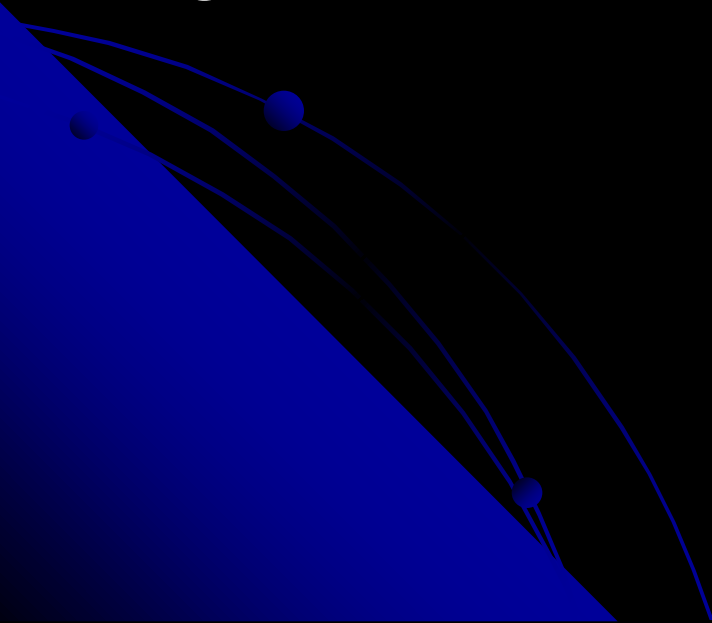
$$x_{t-1}^* = \psi_t(x_t^*)$$



3. Učenie

Hľadáme parametre modelu M

algorithmus Baum-Welsh



Všeobecný algoritmus:

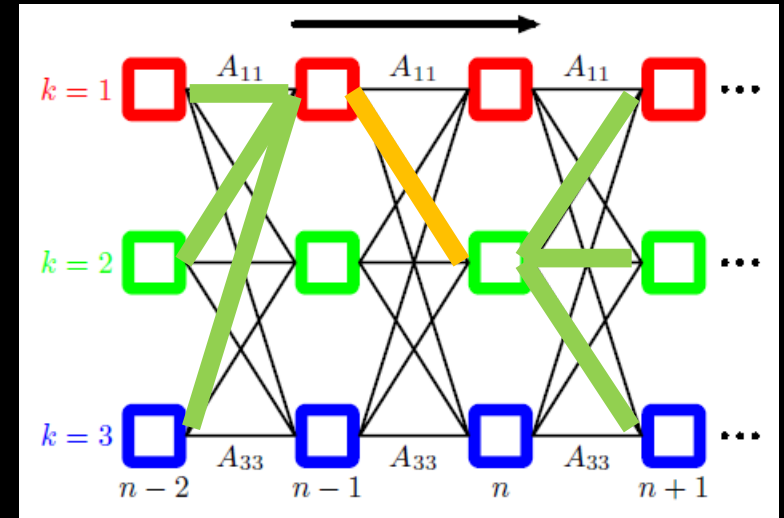
1. Inicializácia: M_0
2. Výpočet nových parametrov M , vzhľadom na M_0 a postupnosť O
3. $M_0 \leftarrow M$
4. Opakovanie 2 a 3, kým nenastane $\|M_0 - M\| < \text{prah}$

B-W algoritmus – špeciálny prípad EM algoritmu

1. krok: výpočet hodnôt funkcií ξ a γ

Pravdepodobnosť prechodu medzi stavmi i a j v čase t pri danom O a M

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) Q_{ij} B_{jy_{t+1}} \beta_{t+1}(j)}{P(O | M)}$$



$$P(O | M) = \sum_{i \in S} \alpha_t(i) \beta_t(i) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \alpha_t(i) Q_{ij} B_{jy_{t+1}} \beta_{t+1}(j)$$

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|M)} = \frac{\sum_{j \in S} \alpha_t(i)Q_{ij}B_{jy_{t+1}}\beta_{t+1}(j)}{P(O|M)}$$

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i)Q_{ij}B_{jy_{t+1}}\beta_{t+1}(j)}{P(O|M)}$$

Pravdepodobnosť ciest
prechádzajúcich
stavom i v čase t

$$\gamma_t(i) = \sum_{j \in S} \xi_t(i, j)$$

2. krok: výpočet nových parametrov

$$\hat{Q}_{ij}$$

$$\hat{B}_{jk} = p(y_t = k \mid x_t = j)$$

$$\hat{\pi}(i)$$

$$\hat{\pi}(i) = \gamma_0(i)$$

Pomer (prechodov medzi i a j) a (prechodov zo stavu i)

$$\hat{Q}_{ij} = \frac{\sum_t \xi_t(i, j)}{\sum_t \gamma_t(i)}$$

Pomer (výskytov výstupu k v stave j) a (výskytov stavu j)

$$\hat{B}_{jk} = \frac{\sum_{\forall t: y_t = k} \gamma_t(j)}{\sum_t \gamma_t(j)}$$

Aplikácie v PV

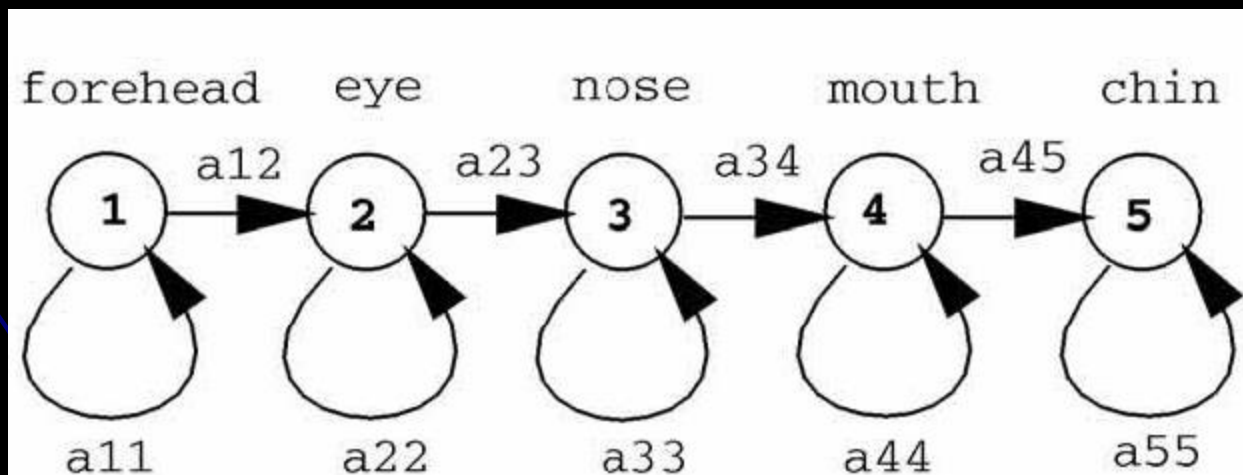
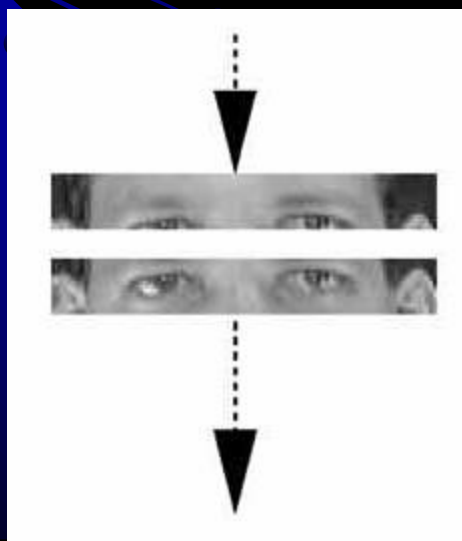
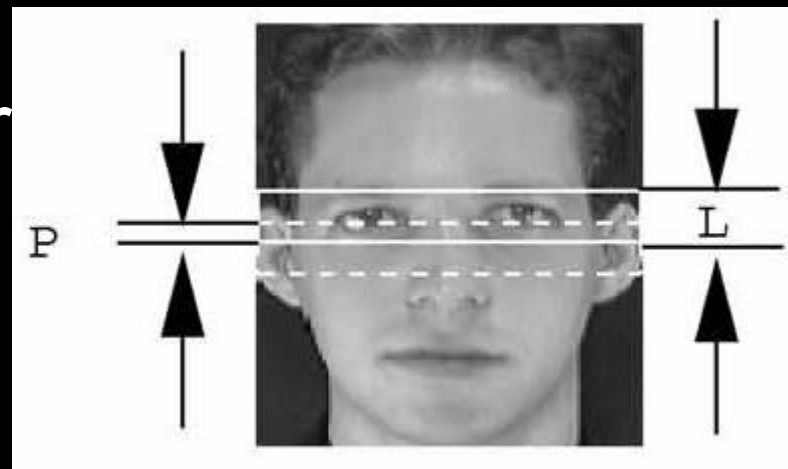
Rozpoznávanie gest

Real-time sledovanie kontúr

Rozpoznávanie písma

Čítanie z pier

Rozpoznávanie tvárí



<https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/9.pdf>

